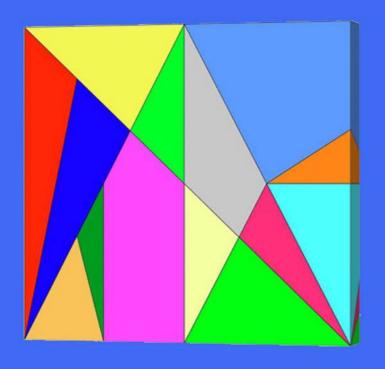
LUCIANO ANCORA

LEGGENDO ARCHIMEDE



MATEMATICA & FISICA

INDICE

- 1 Parte prima MATHS
- 2 Introduzione
- 3 Le opere di Archimede
- 5 Quadratura della parabola con il "numero piramidale quadrato"
- 13 L'articolo nella rivista Archimede
- 21 Quadratura della parabola (un'altra dimostrazione)
- 24 Somma dei quadrati dei primi "n" numeri naturali
- 27 Somma dei quadrati dei primi "n" numeri pari e dispari
- 30 Somma dei cubi dei primi "n" numeri naturali
- 33 Somma dei cubi dei primi "n" numeri pari e dispari
- 36 Somma delle prime "n" somme di potenze
- 41 Una relazione fra numeri figurati
- 44 La congettura di Goldbach con Excel
- 47 Misura del cerchio
- 49 Quadratura del cerchio
- 52 Sulla sfera e il cilindro
- 54 La superficie della sfera
- 56 La mela di Newton
- 58 Il problema delle noci di cocco
- 62 La successione di Fibonacci
- 63 La formula di Binet per i numeri di Fibonacci
- 68 L'algoritmo di Euclide con AutoCAD
- 69 Un utilizzo pratico di AutoCAD
- 71 Tracciatura di componenti di Caldareria e Piping
- 125 La ragazza sul lago Rotondo
- 127 L'ultimo teorema di Fermat: una sfida ancora aperta
- 129 La leggenda di Sissa Nassir
- 131 Problemi sulla scacchiera

- 136 Lo Stomachion
- 139 Sulle aree ed i perimetri dei poligoni regolari
- 143 Aritmetica spiccia
- 149 Un ragionamento "complementare" per dimostrare il problema di Monty Hall
- 150 Ricorrenze . . . ricorrenti
- 151 Polygonal, Pyramidal and Hypersolid numbers
- 159 Second partial sums of m-th powers
- 162 Partial sums of m-th powers with Faulhaber polynomials
- 164 Pascal's triangle and recurrence relations for partial sums of m-th powers
- 166 Horizontal sequences
- 167 Antidiagonal sums of j-th partial sums of m-th powers
- 168 The differences of m-th powers
- 170 The Centered Octahedral Number
- 172 Parte seconda PHYSICS
- 173 Il moto dei pianeti intorno al Sole
- 188 La teoria della Relatività Ristretta
- 202 La teoria della Relatività Generale
- 215 Dal Big Bang all'Uomo
- 221 Sulla rarefazione della materia nell'universo
- 226 Il pettirosso quantistico
- 228 La ricostruzione di Notre Dame de Paris
- 234 Formazione ed evoluzione dello spettro della Radiazione di Fondo Cosmico
- 291 Il "Liber Abaci" di Leonardo Fibonacci tradotto in Italiano

PARTE PRIMA



Introduzione

Vi sarà capitato di trovare, nell'introduzione a qualche testo divulgativo di matematica, una raccomandazione dell'autore a leggere tenendo a portata di mano carta e matita, per poter rifare da soli calcoli, disegni, ragionamenti. Così facendo si raggiunge certamente, attraverso l'approfondimento, una più sicura conoscenza dei fatti della matematica.

Ma si può fare di più. Si può tenere acceso, mentre si legge, un personal computer, per poterne utilizzare, all'occorrenza, le straordinarie capacità di calcolo e grafiche. Si possono ottenere così risultati che vanno oltre la semplice acquisizione della conoscenza.

Un lettore che abbia sufficiente spirito di osservazione e capacità di analisi, pur senza possedere un elevato grado di preparazione, può addirittura fare delle piccole "scoperte". Si può infatti, usando un foglio elettronico, analizzare calcoli complessi seguendone lo svolgimento attraverso lo studio dei risultati parziali, che spesso presentano interessanti regolarità o simmetrie, indici talvolta della presenza di schemi ricorrenti o induttivi che possono condurre alla scoperta di soluzioni generali del problema in esame. Ed ancora, usando il CAD, è possibile sfruttare la grafica del computer per costruire modelli geometrici del problema, ed osservarli poi da angolazioni diverse, alla ricerca di un procedimento risolutivo, che spesso si presenta in modo sorprendente.

Archimede, nella lettera introduttiva al suo libro "Sulla sfera e il cilindro", riferendosi ai risultati delle sue ricerche su questi oggetti, scrive: "... per queste proprietà appartenenti da sempre alla natura di queste figure accadde che dei molti degni geometri anteriori a Eudosso tutti le ignorarono e nessuno le comprese". Le proprietà degli oggetti della matematica sono quindi "preesistenti" nella natura stessa degli oggetti, nascoste al nostro pensiero. Il computer, amplificando le nostre capacità di indagine, ci aiuta a riscoprirle, ed il loro ritrovamento è sempre fonte di sorpresa e meraviglia.

Le opere di Archimede

Da: Opere di Archimede, a cura di Attilio Frajese (Utet, 1974).

1 Sull'equilibrio dei piani

Opera divisa in due libri in cui si tratta di concetti e proposizioni che riguardano la meccanica: la statica in particolare. Nel primo libro viene trattato l'argomento dei centri di gravità del triangolo e del trapezio. Nel libro secondo si applicano risultati del primo per la determinazione del centro di gravità del segmento parabolico.

2 Quadratura della parabola

L'opera ha per argomento la quadratura del segmento parabolico, cioè la costruzione (con riga e compasso) di un poligono ad esso equivalente. Archimede risolve il problema servendosi prima di metodi "meccanici", ed infine lo dimostra geometricamente applicando il rigoroso "metodo di esaustione".

3 Sulla sfera e il cilindro

Opera in due libri che può essere considerata la diretta continuazione degli Elementi di Euclide. Il libro primo contiene risultati fondamentali riguardanti la superficie e il volume della sfera. Il libro secondo è composto da problemi relativi alla divisione della sfera (mediante piani) in segmenti soddisfacenti a determinate condizioni.

4 Metodo

Opera perduta attraverso i secoli e felicemente ritrovata nel 1906 dal filologo danese Heiberg. In essa si espone quel metodo "meccanico" che Archimede adoperava per trovare i suoi risultati, che solo in un secondo momento avrebbe dimostrato geometricamente in maniera rigorosa.

5 Spirali

In quest'opera Archimede introduce e studia quella curva che è stata in seguito chiamata spirale di Archimede. La trattazione procede su due argomenti, consistenti nell'uso della spirale per la rettificazione della circonferenza e nella quadratura di aree comprese fra la spirale e determinate rette.

6 Conoidi e sferoidi

Archimede, in quest'opera originale, studia alcuni solidi limitati da superfici dette oggi del secondo ordine, o "quadriche". Si tratta di solidi ottenuti mediante una rotazione completa di una curva piana intorno ad un asse fisso. L'opera contiene risultati fondamentali riguardanti la determinazione dei volumi di segmenti dei conoidi e dello sferoide e sue parti.

7 Galleggianti

Quest'opera si divide in due libri, il cui argomento comune è quello della immersione, totale o parziale, di un corpo solido entro un liquido. Nel libro primo viene stabilito e trattato il famoso principio di idrostatica che i posteri hanno giustamente chiamato "principio di Archimede".

8 Misura del cerchio

Questa breve opera è probabilmente un estratto da altra opera più completa andata perduta. In essa sono contenute solo tre proposizioni, che trattano i problemi della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio. La proposizione terza, con la sua determinazione approssimata di π , costituisce uno dei più noti titoli di merito di Archimede.

9 Arenario

In quest'opera Archimede si pone il problema di contare il numero dei grani di sabbia contenuti nella sfera delle stelle fisse, racchiudente l'universo. Ciò facendo, escogita un ingegnoso sistema per esprimere numeri molto grandi (cosa ardua per i greci, che non possedevano un efficace sistema di numerazione). L'opera contiene inoltre la più antica testimonianza sul sistema eliocentrico di Aristarco di Samo ed un interessante passo in cui Archimede, con semplici mezzi, misura l'angolo secondo il quale è visibile il disco solare.

Quadratura della parabola con il "numero piramidale quadrato"

Dimostreremo in questo articolo il teorema di Archimede sulla quadratura del segmento parabolico, senza fare ricorso agli strumenti del calcolo integrale, ma utilizzando semplicemente il *numero piramidale quadrato* ed i criteri di convergenza delle successioni numeriche.

La traduzione dall'ambito geometrico a quello numerico avverrà usando, come unità di misura delle aree coinvolte nella dimostrazione, triangoli equivalenti, opportunamente individuati nel reticolo di costruzione del segmento parabolico.

Introduzione

La Quadratura della parabola è una delle prime opere composte da Archimede. Essa ha per argomento la quadratura del segmento parabolico, cioè la costruzione (con riga e compasso) di un poligono ad esso equivalente. Per segmento parabolico Archimede intende la regione compresa fra una retta e una parabola, pensata come sezione di un cono retto. L'opera si apre con un'introduzione che tratta delle proprietà elementari della parabola; si passa poi ad eseguire la quadratura della parabola per via meccanica, con considerazioni che fanno riferimento all'equilibrio di una leva; finalmente si giunge alla dimostrazione geometrica della quadratura con il metodo di esaustione.

La nostra dimostrazione rivisita in chiave moderna l'opera di Archimede, utilizzando la stessa figura da lui usata nella proposizione 16, in cui si dimostra il risultato fondamentale che il triangolo *ABC* è triplo del segmento parabolico. Archimede usa un triangolo *ABC* rettangolo in *B*, avendo mostrato, nella precedente proposizione 15, che il risultato relativo ad una tale situazione si generalizza ad un segmento parabolico con base non perpendicolare all'asse (nota 1). Nella successiva proposizione 17 Archimede deduce il risultato più noto che il segmento parabolico è i 4/3 del triangolo inscritto.

Proposizione 16

Sia AB la base di un segmento parabolico; si conduca da B la retta BC parallela all'asse della parabola e da A la retta AC tangente alla parabola in A. Dico che l'area del segmento parabolico è un terzo dell'area del triangolo ABC.

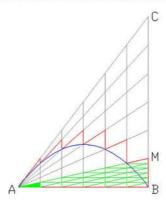


Fig. 1

Dimostrazione

Si dividano i segmenti AB e BC in 6 parti uguali e si conducano per i punti di divisione su AB le parallele alla retta BC, e per i punti su BC le congiungenti con A. La parabola passa per i punti di intersezione del reticolo così tracciato, poiché, per una sua proprietà, essa taglia le linee verticali del reticolo nello stesso rapporto nel quale le linee verticali stesse tagliano il segmento AB (non riportiamo la dimostrazione di questo fatto; comunque, una verifica per via analitica non presenta difficoltà).

Consideriamo la *figura a denti di sega* che circoscrive il segmento parabolico. L'area di questa figura eccede l'area del segmento stesso di una quantità che è pari all'area complessiva dei denti. Aumentando indefinitamente il numero delle divisioni, che indichiamo con *n*, sui segmenti *AB* e *BC*, l'area in eccesso tende a zero per *n* tendente ad infinito. In altre parole: l'area della figura a denti di sega *converge* all'area del segmento parabolico, per *n* tendente ad infinito.

La figura a denti risulta divisa in 6 strisce verticali composte: la prima da 6 triangoli *equivalenti*, e le altre strisce, rispettivamente, da 5, 4, 3, 2, 1 trapezi, *equivalenti* fra loro in ciascuna striscia. Consideriamo ora il triangolino, evidenziato in verde, con un vertice nel punto A. Useremo questo triangolo come *unità di misura* delle aree nei conteggi che seguono.

Il triangolo *ABM* contiene: 1+3+5+7+9+11 (somma dei primi 6 numeri dispari) = 6^2 triangoli verdi (la somma dei primi n numeri dispari è n^2).

L'area del triangolo ABC è uguale all'area di: $6 \cdot 6^2 = 6^3$ triangoli verdi. In generale, per un qualsiasi numero n di divisioni di AB e BC, l'area del triangolo ABC è uguale all'area di n^3 triangoli verdi.

Indichiamo con *A(cir.)* la figura a denti di sega circoscritta al segmento parabolico. Essa contiene (per l'equivalenza dei trapezi di cui sopra):

$$A_{(cir.)} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 91$$
 triangoli verdi. (1)

Nella (1) ciascun addendo è un prodotto: i primi fattori sono, nell'ordine, i primi 6 numeri dispari, mentre i secondi sono, a ritroso, i primi 6 numeri naturali. Rappresentiamo ora la (1) con lo schema seguente (che riproduce anche la dislocazione nella figura 1 dei trapezi e del loro contenuto in triangoli, rendendo più intelligibile il conteggio).

1	\rightarrow					= 1	= 12
1	3	\rightarrow				= 4	= 22
1	3	5	\rightarrow			= 9	= 32
1	3	5	7	\rightarrow		= 16	= 42
1	3	5	7	9	\rightarrow	= 25	= 5 ²
1	3	5	7	9	11	= 36	= 6 ²
							91

Fig. 2

Dallo schema segue che il totale dei triangoli verdi, contenuti nella figura A(cir.), è uguale alla somma dei quadrati dei primi 6 numeri naturali (esiste anche un percorso diagonale nello schema che porta alla stessa conclusione (nota 5)). Risulta quindi che l'area della figura a denti di sega, espressa in triangoli verdi, è data dal *numero piramidale quadrato* $P_{\mathcal{E}}$:

$$A_{(cir.)} = P_6 = \sum_{k=1}^{6} k^2$$

La generalizzazione, relativa alla divisione in un numero qualsiasi *n* di parti, segue dalla possibilità di estendere lo schema della figura 2 al numero *n*, aggiungendo righe contenenti sequenze successive di numeri dispari, fino all'*n*-sima. Si ottiene così, in generale, che:

$$A_n(cir.) = 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \dots + (2n-1) \cdot 1$$

e che l'area dell'n-sima figura a denti di sega, che circoscrive il segmento parabolico, è espressa dal *numero piramidale quadrato* P_n :

$$A_{n (cir.)} = P_n = \sum_{k=1}^n k^2$$

Questa circostanza, insieme al risultato ottenuto per l'area del triangolo ABC (che è uguale a n^3), ci permette di ridurre la dimostrazione alla semplice verifica della seguente relazione:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

dove la somma al numeratore del primo membro è l'n-simo numero piramidale quadrato P_n .

E' ben noto che tale somma vale: $P_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

A questo punto il limite (2) segue da fatto che il rapporto tra due polinomi dello stesso grado in n tende, per n tendente a infinito, al rapporto tra i rispettivi coefficienti direttivi (coefficienti dei termini di grado massimo).

Ora, la (2) afferma che: l'area (misurata in triangoli verdi) della figura circoscritta al segmento parabolico vale, per *n* tendente a infinito, un terzo dell'area del triangolo *ABC*. Segue quanto affermato nella proposizione 16.

La dimostrazione "dal basso"

Affinché la nostra dimostrazione possa dirsi completa sono necessarie due stime, una dall'alto e una dal basso, cioè con una figura fuori ed una dentro al segmento parabolico.

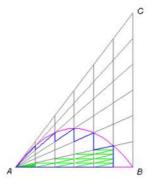


Fig. 3

Inscrivendo nel segmento parabolico una figura a denti di sega, che indichiamo con *A(ins.)*, è facile convincersi che questa contiene:

$$A_{(ins.)} = 1.5 + 3.4 + 5.3 + 7.2 + 9.1 = 55$$
 triangoli verdi.

Ma il numero 55 è il 5° numero piramidale quadrato; pertanto, seguendo un ragionamento analogo al precedente, possiamo scrivere:

$$A_{n(ins.)} = 1 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (2n-3) \cdot 1$$

Per l'area (in triangoli verdi) dell'n-sima figura inscritta abbiamo così:

$$A_{n \text{ (ins.)}} = P_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Quindi, la dimostrazione "dal basso" segue dall'uguaglianza:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$
 (3)

che risulta corretta, in quanto la somma al numeratore della (3) è:

$$P_{n-1} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2$$

che è ancora un polinomio di terzo grado in n con coefficiente direttivo uguale a 1/3.

Proposizione 17

Conseguenza immediata della proposizione 16 è la proposizione 17 con cui Archimede dimostra il teorema fondamentale sull'area del segmento parabolico (ma avendo impiegato un metodo meccanico):

L' area del segmento parabolico è 4/3 del triangolo avente stessa base ed uguale altezza.

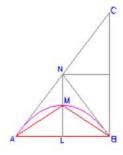


Fig. 4

Essendo infatti, per una proprietà della parabola: *LM = MN*, risulta:

$$A_{SP} = ABC/3 = 4/3 ABM$$

Poiché la proposizione 17 è un corollario della 16, avendo qui dimostrato la 16 per via geometrica, risulterebbe dimostrato per via geometrica anche il teorema fondamentale.

Note

1 - Il modello scelto per la nostra dimostrazione offre l'opportunità di mostrare in maniera diversa quanto affermato da Archimede nella proposizione 15, in cui generalizza la sua dimostrazione ad un segmento parabolico con la base non perpendicolare all'asse. La nostra dimostrazione può fare riferimento (senza cambiare una virgola nel testo) ad una figura più generale ottenuta traslando arbitrariamente il segmento *BC* sulla sua retta di appartenenza, nel modo seguente:

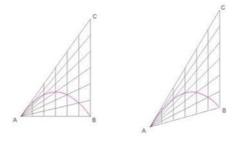


Fig. 5

Infatti la trasformazione lascia invariate tutte le relazioni di equivalenza fra trapezi e fra triangoli utilizzate nella dimostrazione, che sono l'essenza della dimostrazione stessa.

2 - La (2) può anche essere verificata in maniera *visiva*, nel modo seguente: si costruisca una piramide retta a base quadrata ponendo n^2 cubi unitari alla base e salendo concentricamente con $(n-1)^2$, $(n-2)^2$,, 9, 4, 1 cubo in sommità.



Fig. 6

Questa (per n=6) è una rappresentazione geometrica del *numero piramidale quadrato Pn*, il cui volume (numero dei cubi unitari) sarà dato dal numeratore nella (2). Al denominatore della (2) c'è il volume del cubo che la racchiude.



Fig. 7

Al limite di n = infinito la piramide diventa "ideale" ed è noto che il suo volume sarà pari ad un terzo del volume del cubo che la racchiude.

Esistono quindi due modelli diversi rappresentabili con la stessa relazione (2). Ciò induce a pensare che possano essercene degli altri. Si può ad esempio indagare su altre due figure, il cono ed il cilindro circoscritto, i cui volumi stanno nel rapporto di 1 a 3.

Si costruisca quindi un nuovo modello solido ponendo in sommità un cilindro unitario, avente diametro di base ed altezza uguali, e si scenda concentricamente con cilindri di pari altezza, aventi diametri 2, 3, 4, n volte il diametro del cilindro di sommità. Si vede subito che i volumi di questi strati cilindrici crescono come i quadrati dei numeri naturali.

Proseguendo allo stesso modo, con altre figure piane invece del quadrato e del cerchio, si trova infine che esistono infiniti modelli che descrivono la (2). Qui le figure piane da impiegare sono i *poligoni regolari*, tutti inscrivibili in una circonferenza. Risulterà sempre che le aree di queste figure, e quindi i volumi degli strati, variano come i quadrati di *n*.

Si noti infine che la concentricità delle costruzioni non è una condizione essenziale, cioè la stessa cosa vale anche per un qualsiasi modello obliquo (o costruito su un qualsiasi asse curvilineo).

3 - Quanto detto nel riquadro fra i tratteggi in verde a pag. 9, può essere "visto", con riferimento ai modelli geometrici rappresentati nelle figure 1 e 6-7, nel modo seguente:

A - Il termine di terzo grado del polinomio al numeratore della (2) corrisponde: al segmento parabolico della fig. 1, ed alla piramide regolare (inscritta) della fig. 7.

B – I termini di grado inferiore dello stesso polinomio, sono: i denti di sega della fig. 1, ed i "gradini" della piramide in fig. 6 (vedi anche figure a pag. 19).

Nel processo di limite espresso con la (2), le quantità A non variano, mentre le quantità B diventano sempre più evanescenti, fino a scomparire del tutto all'infinito.

4 - Una ulteriore indagine sulla (2), conduce alla seguente generalizzazione:

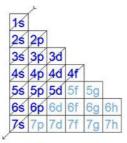
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k^{m}}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
 (4)

nella quale, al variare di m, le quantità al numeratore sono, ordinatamente: il numero triangolare Tn, il numero piramidale quadrato Pn, il numero triangolare "sauared" T^2n ed altre somme che si calcolano con la formula di Faulhaber.

Il limite (4) segue dal fatto che un polinomio di Faulhaber di grado m+1 ha coefficiente direttore pari a 1/m+1. La (4) genera, al variare di m, la successione convergente degli inversi dei numeri naturali: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/m+1, ...

Si potrebbe a questo punto riscrivere tutto il discorso della nota 3 in termini di polinomi di Faulhaber di grado m+1 e relativi modelli (m+1)dimensionali, distinguendo in essi, nel processo di limite (4), i componenti invarianti dalle "asperità" (corrispondenti ai denti ed ai gradini visti in nota 2) che invece tendono ad annullarsi all'infinito.

5 - Un altro esempio di come sia possibile ordinare dei dati percorrendo le griglie, l'ho trovato anni fa studiando "Struttura della materia". In figura è mostrato un percorso diagonale che riproduce l'ordine di riempimento, per energie crescenti, degli stati quantici di un atomo:



cioè la famosa sequenza: 1s 2s 2p 3s 3p 4s 3d 4p 5s 4d 5p 6s 4f 5d 6p 7s

MathEduc Database

© 2017 FIZ Karlsruhe

ZMATH 2016f.01058

Ancora, Luciano

Quadrature of the parabola with the square pyramidal number. (Quadratura della parabola con il numero piramidale quadrato.)

Archimede 66, No. 3, 139-144 (2014).

Summary: Drawing the parabolic segment with the Archimedes triangle, equivalent triangles are detected into the $n \times n$ trapezoids grid; so we can measure a figure circumscribed to the segment and the entire construction triangle. It is seen that these figures contains respectively: P_n (the square pyramidal number) and n^3 triangles. For n tending to infinity the ratio of these quantities tends to 1/3, that proves the Archimedean theorem.

Classification: G70 K20

Keywords: parabolas; triangles; square pyramidal numbers

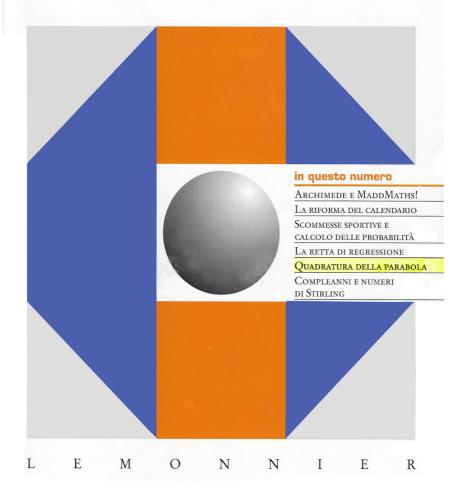


Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LXVI LUGLIO-SETTEMBRE 2014

3/2014



QUADRATURA DELLA PARABOLA CON IL NUMERO PIRAMIDALE QUADRATO

Dimostreremo in questo articolo il teorema di Archimede sulla quadratura del segmento parabolico, senza fare ricorso agli strumenti del calcolo integrale, ma usando semplicemente il *numero piramidale quadrato* e i criteri di convergenza delle successioni numeriche.

La traduzione dall'ambito geometrico a quello numerico avverrà usando, come unità di misura delle aree coinvolte nella dimostrazione, triangoli equivalenti, opportunamente individuati nel reticolo di costruzione del segmento parabolico.

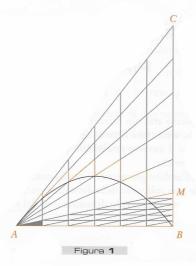
1. INTRODUZIONE

La Quadratura della parabola è una delle prime opere composte da Archimede. Essa ha per argomento la quadratura del segmento parabolico, cioè la costruzione (con riga e compasso) di un poligono a esso equivalente. Per segmento parabolico Archimede intende la regione compresa fra una retta e una parabola, pensata come sezione di un cono retto. L'opera si apre con un'introduzione che tratta delle proprietà elementari della parabola; si passa poi a eseguire la quadratura della parabola per via meccanica, con considerazioni che fanno riferimento all'equilibrio di una leva; finalmente si giunge alla dimostrazione geometrica della quadratura con il metodo di esaustione.

La nostra dimostrazione rivisita in chiave moderna l'opera di Archimede, utilizzando la stessa figura da lui usata nella proposizione 16, in cui si dimostra il risultato fondamentale che il triangolo ABC è il triplo del segmento parabolico. Archimede usa un triangolo ABC rettangolo in B, avendo mostrato, nella precedente proposizione 15, che il risultato relativo a una tale situazione si generalizza a un segmento parabolico con base non perpendicolare all'asse. Nella successiva proposizione 17 Archimede deduce il risultato più noto che il segmento parabolico è i 4/3 del triangolo inscritto.

2. DIMOSTRAZIONE

Proposizione 16. Sia AB la base di un segmento parabolico; si conduca da B la retta BC parallela all'asse della parabola e da A la retta AC tangente alla parabola in A. Dico che l'area del segmento parabolico è un terzo dell'area del triangolo ABC.



Si dividano i segmenti AB e BC in 6 parti uguali e si conducano per i punti di divisione su AB le parallele alla retta BC, e per i punti su BC le congiungenti con A. La parabola passa per i punti di intersezione del reticolo così tracciato, poiché, per una sua proprietà, essa taglia le linee verticali del reticolo nello stesso rapporto nel quale le linee verticali stesse tagliano il segmento AB (non riportiamo la dimostrazione di questo fatto; comunque, una verifica per via analitica non presenta difficoltà).

Consideriamo la figura a denti di sega che circoscrive il segmento parabolico. L'area di questa figura eccede l'area del segmento stesso di una quantità che è pari all'area complessiva dei denti. Aumentando indefinitamente il numero delle divisioni, che indichiamo con n, sui segmenti AB e BC, l'area in eccesso tende a zero per n tendente a infinito. In altre parole: l'area della figura a denti di sega converge all'area del segmento parabolico, per n tendente a infinito.

La figura a denti risulta divisa in 6 strisce verticali composte: la prima da 6 triangoli *equivalenti*, e le altre strisce, rispettivamente, da 5, 4, 3, 2, 1 trapezi, *equivalenti* fra loro in ciascuna striscia. Consideriamo ora il triangolino, evidenziato in grigio, con un vertice nel punto A. Useremo questo triangolo come *unità di misura* delle aree nei conteggi che seguono.

Il triangolo *ABM* contiene: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 (somma dei primi 6 numeri dispari) = 6^2 triangoli grigi (la somma dei primi n numeri dispari è n^2).

L'area del triangolo ABC è uguale all'area di: $6 \cdot 6^2 = 6^3$ triangoli grigi. In generale, per un qualsiasi numero n di divisioni di AB e BC, l'area del triangolo ABC è uguale all'area di n^3 triangoli grigi.

Indichiamo con A(cir.) la figura a denti di sega circoscritta al segmento parabolico. Essa contiene (per l'equivalenza dei trapezi di cui sopra):

$$A(cir.) = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 91$$
 triangoli grigi. (1)

Nella (1) ciascun addendo è un prodotto: i primi fattori sono, nell'ordine, i primi 6 numeri dispari, mentre i secondi sono, a ritroso, i primi 6 numeri naturali.

Rappresentiamo ora la (1) con lo schema seguente (che riproduce anche la dislocazione nella figura 1 dei trapezi e del loro contenuto in triangoli, rendendo più intelligibile il conteggio).

1						= 1	= 12
1	3	arshi	i M	3.4	71173	= 4	= 22
1	3	5	Tues.	The state of	hene	= 9	$= 3^2$
1	3	5	7	12+	711	= 16	= 42
1	3	5	7	9		= 25	$=5^{2}$
1	3	5	7	9	11	= 36	$=6^{2}$
w)]	-13	1 5	14		yare:	14 (2)	91

Figura 2

Dallo schema segue che il totale dei triangoli grigi, contenuti nella figura A(cir.), è uguale alla somma dei quadrati dei primi 6 numeri naturali (esiste anche un percorso diagonale nello schema che porta alla stessa conclusione).

Risulta quindi che l'area della figura a denti di sega, espressa in triangoli grigi, è data dal numero piramidale quadrato P_6 :

$$A(cir.) = P_6 = \sum_{k=1}^{6} k^2.$$

La generalizzazione, relativa alla divisione in un numero qualsiasi n di parti, segue dalla possibilità di estendere lo schema della figura 2 al numero n, aggiungendo righe contenenti sequenze successive di numeri dispari, fino all'n-esima. Si ottiene così, in generale, che:

$$A_n(cir.) = 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \dots + (2n-1) \cdot 1$$

e che l'area dell'n-sima figura a denti di sega, che circoscrive il segmento parabolico, è espressa dal numero piramidale quadrato P_n :

$$A_n(cir.) = P_n = \sum_{k=1}^n k^2.$$

Questa circostanza, insieme al risultato ottenuto per l'area del triangolo ABC (che è uguale a n^3), ci permette di ridurre la dimostrazione alla semplice verifica della seguente relazione:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

dove la somma al numeratore del primo membro è l'n-esimo numero piramidale quadrato P_n .

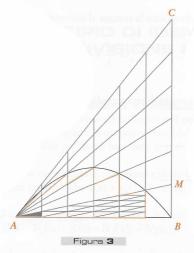
È ben noto che tale somma vale: $P_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

A questo punto il limite (2) segue da fatto che il rapporto tra due polinomi dello stesso grado in n tende, per n tendente a infinito, al rapporto tra i rispettivi coefficienti direttivi (coefficienti dei termini di grado massimo).

Ora, la (2) afferma che: l'area (misurata in triangoli grigi) della figura circoscritta al segmento parabolico vale, per n tendente a infinito, un terzo dell'area del triangolo ABC. Segue quanto affermato nella proposizione 16.

3. LA DIMOSTRAZIONE DAL BASSO

Affinché la nostra dimostrazione possa dirsi completa sono necessarie due stime, una dall'alto e una dal basso, cioè con una figura fuori e una dentro al segmento parabolico.



Inscrivendo nel segmento parabolico una figura a denti di sega, che indichiamo con *A(ins.)*, è facile convincersi che questa contiene:

$$A (ins.) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 55$$
 triangoli grigi.

Ma il numero 55 è il 5° numero piramidale quadrato; pertanto, seguendo un ragionamento analogo al precedente, possiamo scrivere:

$$A_n(ins.) = 1 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (2n-3) \cdot 1$$
.

Per l'area (in triangoli grigi) dell'n-sima figura inscritta abbiamo così:

$$A_n(ins.) = P_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Quindi, la dimostrazione «dal basso» segue dall'uguaglianza:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$
 (3)

che risulta corretta, in quanto la somma al numeratore della (3) è:

$$P_{n-1} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2$$

che è ancora un polinomio di terzo grado in n con coefficiente direttivo uguale a 1/3.

Luciano Ancora

ll.ancora@libero.it

Bibliografia

- [1] Archimede, Opere, a cura di Attilio Frajese, UTET, 1974.
- [2] https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede#Quadratura_della_parabola.
- [3] http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap4.pdf (la proposizione 16 è a pag. 218).

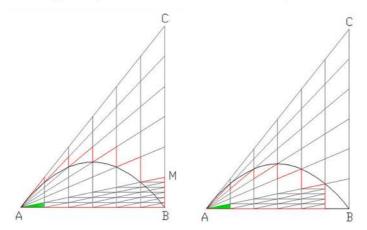
Quadratura della parabola

(un'altra dimostrazione)

La dimostrazione precedente ha fatto seguito ad un'altra dimostrazione, poi abbandonata, che affrontava il problema da un differente punto di vista. Mi sembra opportuno pubblicare qui anche quest'ultima, per alcuni suoi contenuti degni di nota.

Proposizione 16

L'area del segmento parabolico é un terzo dell'area del triangolo ABC.



Dimostrazione

Siano AB e BC divisi in 6 parti uguali e sia il triangolo di colore verde l'unità di misura delle aree.

Il triangolo ABC contiene 63 triangoli verdi.

Se la proposizione fosse vera, il segmento parabolico ne conterrebbe:

$$A_{SP} = 6^3 / 3 = 72$$

La figura circoscritta ne contiene:

$$A(cir.) = 6.1 + 5.3 + 4.5 + 3.7 + 2.9 + 1.11$$

La figura inscritta ne contiene:

$$A(ins.) = 5.1 + 4.3 + 3.5 + 2.7 + 1.9 + 0.11$$

La semi somma di queste due quantità fornisce (in prima approssimazione) il numero di triangoli verdi contenuti nel segmento parabolico:

$$A(med.) = (11.1 + 9.3 + 7.5 + 5.7 + 3.9 + 1.11)/2 = 73$$

Abbiamo fin qui esaminato il caso generico con 6 divisioni su AB e BC, ottenendo lo scarto di un triangolo verde dal valore presunto dell'area del segmento parabolico A_{SP} e quindi una differenza relativa fra le due aree che vale solo 1/72, già con una divisione così grossolana.

Estendendo i risultati ad un numero n qualsiasi di divisioni, si ha:

$$ABC = n^3$$

$$A_{SP} = n^3/3$$

E per la semi somma delle aree circoscritta ed inscritta:

$$A(med.) = [(2n-1)^{\cdot}1 + (2n-3)^{\cdot}3 + (2n-5)^{\cdot}5 + + (2n-(2n-1))^{\cdot}(2n-1)]/2 =$$

$$= [2n\sum_{1}^{n} (2n-1) - \sum_{1}^{n} (2n-1)^{2}]/2 =$$

$$= [2n^{3} - (4n^{3}-n)/3]/2 =$$

$$= n^{3} - (4n^{3}-n)/6$$

Indichiamo con Δu la differenza assoluta (numero di triangoli verdi unitari) fra le aree A(med.) e A_{SP} e con Δr la differenza relativa. Si ha:

$$\Delta u = A(\text{med.}) - A_{SP} = n^3 - (4n^3 - n)/6 - n^3/3$$

$$\Delta u = n/6$$

$$\Delta r = \Delta u / A_{SP} = (n/6)/(n^3/3)$$

$$\Delta r = n/2n^3$$

Questi risultati, per come sono stati ottenuti, valgono sicuramente per ogni numero intero positivo *n*. Una conferma di ciò la si può avere considerando i valori nella tabella che seque, calcolata su un foglio elettronico:

n	AWB	A(cir.)	A(ins.)	A(med.)	Δu	Δг
6	72	91	55	73	1	0,013888889
12	576	650	506	578	2	0,003472222
24	4608	4900	4324	4612	4	0,000868056
48	36864	38024	35720	36872	8	0,000217014
96	294912	299536	290320	294928	16	0,000054253
192	2359296	2377760	2340896	2359328	32	0,000013563
384	18874368	18948160	18800704	18874432	64	0,000003391

Il principio di induzione assicura che $\Delta u = n/6$ per ogni numero intero positivo n.

La scelta (fortunata) dei triangoli verdi per le unità di misura delle aree, ha quindi permesso di esprimere in termini di n (numero delle divisioni) tutte le grandezze caratteristiche del teorema, cioè le aree e gli scarti Δ .

Si tratta ora, per concludere la dimostrazione, di considerare semplicemente la convergenza della successione numerica che fornisce i valori di Δr per ogni n.

Risulta infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^3} = 0$$

cioè, Δr tende a zero per numero di divisioni n tendente a infinito, limite in cui si ha la coincidenza delle figure e quindi l'uguaglianza delle aree al valore di ABC/3, che è quanto si voleva dimostrare.

Osservazione

Nella dimostrazione sopra esposta è "nascosta" una via per ricavare la formula che calcola la somma dei quadrati dei primi *n* numeri dispari.

Esaminando il foglio elettronico sopra riportato, ci si imbatte nella stupefacente regolarità dei valori di Δu (ottenuti per differenza) e cioè nella evidente relazione:

$$\Delta u = n/6 \tag{a}$$

la cui validità per ogni *n* intero positivo risulta subito dimostrata per induzione. Cercando di ottenere algebricamente la *(a)*, si scrive:

$$\Delta u = A(med.) - A_{SP} =$$

$$= [2n \sum_{1}^{n} (2n-1) - \sum_{1}^{n} (2n-1)^{2}]/2 - n^{3}/3$$

cioè:

$$\Delta u = [2n^3 - (S)]/2 - n^3/3$$

dove (S) è una espressione in n (per ora ignota) che calcola la somma dei quadrati dei primi n numeri dispari. Essendo certi della validità della (a), si scrive quindi:

$$n/6 = [2n^3 - (S)]/2 - n^3/3$$

ottenendo:

$$(S) = (4n^3 - n)/3$$

che è quanto si voleva ottenere.

Somma dei quadrati dei primi "n" numeri naturali

Eseguiremo qui visivamente la derivazione della formula per calcolare il *numero piramidale quadrato*, ovvero la somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali, utilizzando un modello geometrico tridimensionale.

Introduzione

In matematica, il numero piramidale quadrato è un numero figurato che rappresenta il numero di sfere accatastate in una piramide a base quadrata. L'n-esimo numero di questo tipo è quindi la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali. La formula che calcola tale somma, riportata nella proposizione, è stata ottenuta con un procedimento algebrico, in maniera indiretta. George Polya, nel suo libro La scoperta matematica, presenta tale soluzione dicendola "piovuta dal cielo", ottenuta algebricamente con un trucco, come un coniglio estratto da un cilindro. Nella dimostrazione geometrica che segue si è ottenuto lo stesso risultato procedendo in maniera diretta.

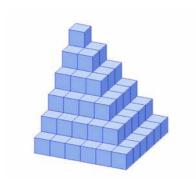
Proposizione

La somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali è data dal numero piramidale quadrato, espresso dalla sequente formula:

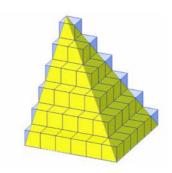
$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Dimostrazione

Costruiamo un modello geometrico tridimensionale che rappresenti la somma dei quadrati dei primi 6 numeri naturali P_6 , utilizzando mattoni cubici di volume unitario (vedi ai links la seconda animazione):



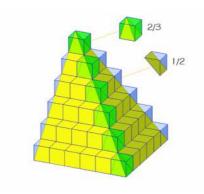
Inseriamo ora nella costruzione una piramide (in giallo), inscritta nel modo seguente:



Sia V_{ℓ} il volume della piramide inscritta. Per ottenere il volume totale P_{ℓ} della costruzione, basta sommare al volume V_{ℓ} della piramide in giallo, il volume in eccesso che si trova all'esterno della piramide stessa.

Tale eccesso vale:

- 2/3 per ciascun cubetto unitario posto sullo spigolo centrale della piramide;
- 1/2 per ciascun cubetto unitario che forma i gradini della costruzione.



Eseguendo i calcoli, si ha:

$$P_6 = V_6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10) =$$

$$=V_6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + (1+2+3+4+5)$$

Applicando il principio di induzione, possiamo scrivere che, in generale:

$$P_n = V_n + \frac{2n}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n^3}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{n^2 + n}{2} - n$$

cioè:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Che è la formula che si cercava.

Somma dei quadrati dei primi "n" numeri pari e dispari

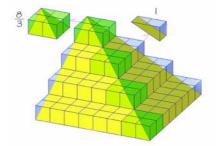
Il metodo impiegato nella dimostrazione precedente, che diremo "metodo della piramide inscritta", si applica altrettanto bene ai casi di somme dei quadrati dei primi n numeri pari e dispari.

Somma dei quadrati dei primi "n" numeri pari

La somma dei quadrati dei primi *n* numeri *pari* si ottiene dalla nota formula:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \frac{2(2n^3 + 3n^2 + n)}{3}$$

Procedendo infatti con il metodo introdotto si ottiene alla fine, per i volumi eccedenti, il seguente risultato:



Il volume della costruzione S_4 si calcola sommando al volume V_4 della piramide inscritta il volume complessivo delle parti eccedenti:

$$S_4 = V_4 + \frac{8}{3} \cdot 4 + 2 \cdot (2 + 4 + 6)$$

Possiamo quindi scrivere che, in generale:

$$S_n = V_n + \frac{8n}{3} + 2(n^2 - n) = \frac{(2n)^3}{6} + \frac{8n}{3} + 2(n^2 - n)$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \frac{2(2n^3 + 3n^2 + n)}{3}$$

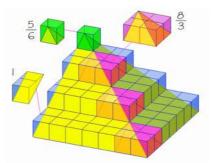
che è la formula che si cercava.

Somma dei quadrati dei primi "n" numeri dispari

La somma dei quadrati dei primi n numeri dispari si ottiene dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Anche qui, procedendo con lo stesso metodo, si ottengono alla fine i seguenti volumi in eccesso:



Il volume della costruzione S_4 si calcola sommando al volume V_4 della piramide inscritta il volume complessivo delle parti eccedenti:

$$S'_4 = V'_4 + \frac{8}{3} \cdot 3 + \frac{5}{6} + 2 \cdot (1 + 3 + 5)$$

Possiamo quindi scrivere che, in generale:

$$S'_{n} = V'_{n} + \frac{8(n-1)}{3} + \frac{5}{6} + 2(n-1)^{2} = \frac{(2n-1)^{3}}{6} + \frac{8(n-1)}{3} + \frac{5}{6} + 2(n-1)$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

che è la formula che si cercava.

Derivazioni algebriche

Per la somma dei quadrati dei numeri pari, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 = 4\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2(2n^3 + 3n^2 + n)}{3}$$

Per la somma dei quadrati dei numeri dispari, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n =$$

$$= 4\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 4\frac{n^2 + n}{2} + n = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Somma dei cubi dei primi "n" numeri naturali

Dimostreremo qui visivamente il teorema di Nicomaco sulla somma dei cubi dei primi *n* numeri naturali, utilizzando la manipolazione di un modello geometrico tridimensionale.

Introduzione

In teoria dei numeri, la somma dei primi *n* cubi è data dal quadrato dell' *n*-simo numero triangolare, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Questa identità è talvolta chiamata teorema di Nicomaco, dal nome del matematico greco dell'età ellenistica, Nicomaco di Gerasa, che ne diede una dimostrazione aritmetica. Molti matematici hanno studiato questa uguaglianza, dimostrandola in molti modi diversi. L'idea di dimostrare visivamente l'identità di Nicomaco non è nuova. Roger B. Nelsen, nel suo lavoro *Proofs without Words* (1993) ne presenta ben sette versioni diverse. Il pregio delle dimostrazioni visive è quello di fornire talvolta, come nel presente lavoro, una evidenza grafica della soluzione cercata.

Proposizione: La somma dei cubi dei primi n numeri naturali è data dal quadrato dell' n-simo numero triangolare:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = T_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

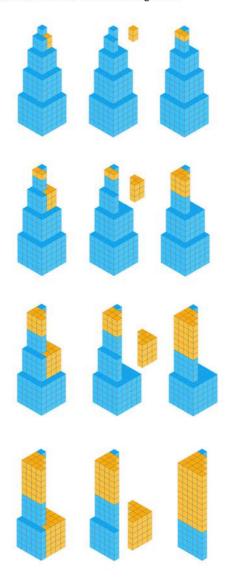
essendo il numero triangolare uguale alla somma dei primi *n* numeri naturali.

Dimostrazione

Costruiamo un modello geometrico tridimensionale che rappresenti la somma dei cubi dei primi 5 numeri naturali, utilizzando mattoni cubici di volume unitario:

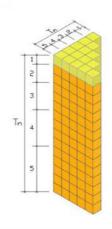


Nel tentativo di ottenere da questo modello una figura equivalente, che dia evidenza dell'identità da dimostrare, operiamo sul modello una trasformazione induttiva, spostando i cubetti unitari nel modo seguente:



L'induttività del processo sta nel fatto che, in ciascun cubo della somma, i cubetti unitari da spostare sono disposti ordinatamente in 1+2+3+...+(k-1) colonne, ciascuna di altezza k.

Il risultato finale della trasformazione è sempre, per qualsiasi n, uno pseudoparallelepipedo, avente per base una rappresentazione geometrica del numero triangolare Tn, e per altezza il numero Tn stesso, che rimane invariato durante la trasformazione.



Appare quindi evidente che, il numero totale dei cubetti unitari, che dà la somma dei cubi dei primi *n* numeri naturali, vale:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = T_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Che è l'identità che si voleva dimostrare.

Somma dei cubi dei primi "n" numeri pari e dispari

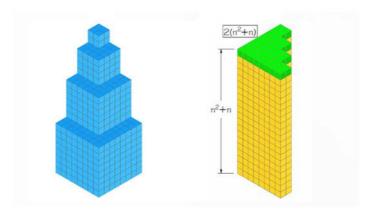
Il metodo impiegato nella dimostrazione precedente, che diremo "metodo delle trasformazioni successive", si applica altrettanto bene ai casi di somme dei cubi dei primi n numeri pari e dispari.

Somma dei cubi dei primi "n" numeri pari

La somma dei cubi dei primi *n* numeri *pari* si ottiene dalla nota formula:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2(n^2 + n)^2$$

Procedendo infatti con il metodo introdotto si ottiene:



cioè, uno pseudo-parallelepipedo avente la base formata da

$$4 \cdot (1+2+3+....+n) = 2(n^2+n)$$

cubi unitari, e l'altezza, che resta invariata, pari a

$$(n^2 + n)$$
 cubi unitari.

Per cui, il volume della figura, cioè la somma che si cercava, risulta:

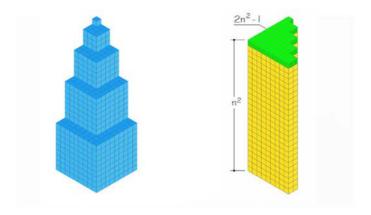
$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2(n^2 + n)^2$$

Somma dei cubi dei primi "n" numeri dispari

La somma dei cubi dei primi *n* numeri *dispari* si ottiene dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$$

Anche qui, procedendo con la trasformazione, si ottiene:



Per cui, calcolando il numero dei cubetti unitari, risulta:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$$

che è la formula che si cercava.

Derivazioni algebriche

Per la somma dei cubi dei numeri pari, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = \sum_{k=1}^{n} 8k^3 = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 = 8\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2 = 2(n^2 + n)^2$$

Per la somma dei cubi dei numeri dispari, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) =$$

$$= 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= n^2 (2n-1)$$

Somma delle prime "n" somme di potenze

Consideriamo le somme delle potenze di interi successivi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m} = 1^{m} + 2^{m} + \dots + n^{m}$$
(1)

che, come sappiamo, si calcolano con le espressioni polinomiali di Faulhaber, nel modo sequente:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} (n^2 + n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} (2 n^3 + 3 n^2 + n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} (n^4 + 2 n^3 + n^2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} (6 n^5 + 15 n^4 + 10 n^3 - n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12} (2 n^6 + 6 n^5 + 5 n^4 - n^2)$$

. (la tavola prosegue indefinitamente).

Ciascuna di queste espressioni genera, al variare di n, una successione numerica crescente, del tipo di quella che si ottiene per m=2:

che è la successione dei numeri piramidali quadrati.

Ci proponiamo di trovare un modo per calcolare, data una qualsiasi di dette successioni, la somma dei primi suoi *n* termini, cioè la somma:

$$\sum_{k=1}^{n} (1^{m} + 2^{m} + \dots + n^{m})$$

Una opportunità per ottenere questo risultato ce la offre la seguente tabella (nota A):

:	:		:	\$:	:		 - 4	
7 ^m	 7 ^m	7 ^m							
6 ^m	 6 ^m	6 ^m							
5 ^m	 5 ^m	5 ^m							
4 ^m	 4 ^m	4 ^m							
3 ^m	 3 ^m	3 ^m							
2 ^m	 2 ^m	2 ^m							
1 ^m	 1 ^m	1 ^m							

Descriviamone il contenuto:

 Sommando il contenuto di ciascuna colonna (caselle rosse + nere), si ottiene la somma delle prime n potenze m-sime, che (in omaggio a Faulhaber) indichiamo con F_m:

$$F_m = \sum_{k=1}^n k^m$$

e il contenuto dell'intera tabella sarà quindi:

$$(n+1)F_m = (n+1)\sum_{k=1}^n k^m$$

La sezione in nero contiene, in ciascuna riga, la quantità:

$$k^m \cdot k = k^{(m+1)}$$

Sommando il contenuto di tutte le righe, si ottiene la somma delle prime n potenze (m+1)-sime:

$$F_{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} k^{(m+1)}$$

La sezione in rosso contiene, nelle colonne, la successione delle somme F_m.
 L'intera sezione contiene la quantità che vogliamo calcolare, cioè la (1):

$$\sum_{k=1}^{n} (1^{m} + 2^{m} + \dots + n^{m}) = \sum_{k=1}^{n} F_{m}$$

La quantità che cerchiamo si ottiene quindi sottraendo al contenuto dell'intera tabella, il contenuto delle caselle nere, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} F_m = (n+1)F_m - F_{(m+1)}$$
 (2)

Eseguendo i calcoli algebrici per m = 1, 2, 3, si ottiene:

m = 1

$$\sum_{k=1}^{n} F_1 = (n+1)F_1 - F_2$$

$$= (n+1)\frac{n^2 + n}{2} - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \boxed{\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}}$$

m = 2

$$\sum_{k=1}^{n} F_2 = (n+1)F_2 - F_3$$

$$= (n+1)\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \left\lceil \frac{n^2 + n}{2} \right\rceil^2 = \frac{n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n}{12}$$

m = 3

$$\sum_{k=1}^{n} F_3 = (n+1)F_3 - F_4$$

$$=(n+1)\left[\frac{n^2+n}{2}\right]^2 - \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30} = \frac{3n^5+15n^4+25n^3+15n^2+2n}{60}$$

Le verifiche con Excel hanno dato esito positivo.

Riportiamo di seguito la scansione del test eseguito per m=3, fino ad n=7:

n	n ³	F ₃	Α	В
1	1	1	1	1
2	8	9	10	10
3	27	36	46	46
4	64	100	146	146
5	125	225	371	371
6	216	441	812	812
7	343	784	1596	1596

La colonna A contiene le somme così calcolate: casella a sinistra + casella in alto. La colonna B contiene le somme calcolate inserendo la formula da verificare.

Le espressioni polinomiali generate dalla (2) costituiscono la naturale estensione di quelle elencate all'inizio di questo articolo. La formula generale per ottenerle in maniera diretta si scrive, nella notazione compatta della formula di Faulhaber, nel modo sequente:

$$\sum_{k=1}^{n} F_m = (n+1)F_m - F_{(m+1)}$$

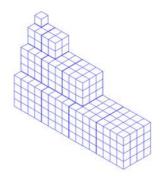
$$= \frac{n+1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} {m+1 \choose k} B_k (n+1)^{m+1-k} - \frac{1}{m+2} \sum_{k=0}^{m+1} {m+2 \choose k} B_k (n+1)^{m+2-k}$$
(3)

dove le quantità Bk sono i numeri di Bernoulli.

Questa formula calcola, per ogni numero naturale n e per ogni potenza m, la somma delle prime n somme di potenze.

Note

(A) – Questa tabella è nata dall'idea di rappresentare, con il solito modello tridimensionale a cubetti, la somma delle quarte potenze dei primi 4 numeri naturali, semplicemente replicando affiancate, 2, 3 e 4 volte, le figure di 2³, 3³ e 4³, come nella figura sequente:



Ho poi trovato più agevole ragionare su uno schema come quello della tabella.

(B) – Non so se sia possibile eseguire uno sviluppo della formula (3), nella sua notazione compatta, per ottenerne una più semplice.

Una relazione fra numeri figurati

Il "numero piramidale quadrato" può essere scomposto nella somma di due numeri tetraedrici meno un numero triangolare, cioè nel modo seguente:

$$P_n = 2\Theta_n - T_n \tag{1}$$

Lo si può vedere facilmente in due modi diversi:

- Si possono incolonnare due sequenze di numeri tetraedrici:
 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455,
 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455,
 ed una sequenza di numeri triangolari:
 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91,
 e sottrarre quest'ultima dalla somma delle prime due, ottenendo:
 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819,
- Oppure, sostituendo al secondo membro della (1) le formule risolventi:

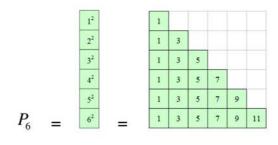
$$P_n = 2\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$
 (2)

Ma così facendo si eseguono delle semplici verifiche.

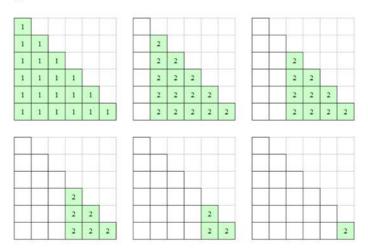
Sono convinto che di relazioni del tipo proposto nella (1) ne esistano molte. Si potrebbero cercare con un programma di calcolo che analizzi le corrispondenze fra i valori delle successioni dei numeri figurati, come abbiamo fatto nella prima verifica. Tuttavia, gli eventuali risultati di una tale ricerca andrebbero spiegati e dimostrati per ogni n.

Vi faccio vedere come ho scoperto la proposizione, dandone nel contempo la dimostrazione.

Consideriamo uno schema già utilizzato per rappresentare il numero piramidale quadrato P_6 :



Questo schema può essere visto come la sovrapposizione di 6 "layers" omogenei:



che rappresentano, in termini di numeri triangolari, le seguenti quantità:

$$T_6$$
, $2T_5$, $2T_4$, $2T_3$, $2T_2$, $2T_1$

perciò, sommando possiamo scrivere:

$$P_6 = T_6 + 2(T_5 + T_4 + T_3 + T_2 + T_1) = T_6 + 2\sum_{k=1}^{5} T_k$$

Ma la somma dei primi 5 numeri triangolari è il numero tetraedrico $\Theta_{5, }$ quindi:

$$P_6 = T_6 + 2\Theta_5 = T_6 + 2(\Theta_6 - T_6) = 2\Theta_6 - T_6$$

Anche qui, la generalizzazione segue dalla considerazione che il passaggio, da un certo numero n al successivo, è un processo *induttivo* che si realizza aggiungendo:

- una riga con la sequenza degli n+1 numeri dispari, cioè P_{n+1} , nello schema di P_n in figura 1;
- due layers, T_n e T_{n+1} (che come si sa equivalgono al P_{n+1} aggiunto al punto precedente), nella seconda figura.

Si può quindi dire che, in generale, il numero piramidale quadrato P_n può esprimersi come:

$$P_n = 2\Theta_n - T_n$$

Che è la relazione (1) proposta.

E' nota la storia della derivazione algebrica della formula per P_n al primo membro della (2). Mi chiedevo se, fatte le opportune verifiche cronologiche sull'uscita delle tre formule componenti, la (2) stessa (insieme alla demo del presente articolo) non possa essere considerata come "un'altra via" per ottenere la formula della somma P_n .

La congettura di Goldbach con Excel

In teoria dei numeri, la "congettura di Goldbach" è un vecchio problema irrisolto che afferma:

"ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come la somma di due numeri primi, non necessariamente distinti".

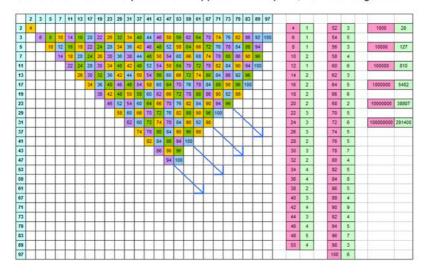
Per farmi un'idea sulla validità della congettura, ho condotto un'indagine esplorativa, facendo uso, come al solito, degli strumenti informatici a mia disposizione.

Si definiscono "partizioni di Goldbach" tutti i diversi modi di scrivere un numero pari *N* come somma di due numeri primi:

N = p + q

La congettura di Goldbach afferma quindi che ogni numero pari N ha almeno una partizione di Goldbach.

Impiegando Excel, ho costruito una sorta di tavola "pitagorica" di addizione, per ottenere tutti le somme possibili tra coppie di numeri primi, nel modo seguente:

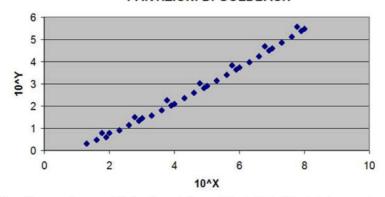


Come si vede, la tavola fornisce un numero pari N ad ogni incrocio tra due numeri primi qualsiasi, e può essere estesa all'infinito. La colorazione facilita il conteggio delle partizioni di Goldbach per i numeri pari N da 4 a 100. I risultati sono riportati nelle prime due colonne verdi a destra della tabella.

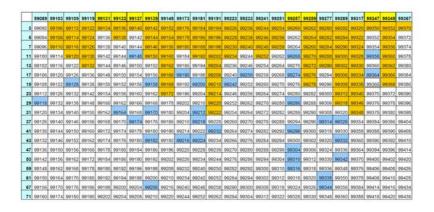
Ricercando su Internet, ho poi scoperto nel sito del Prof. Bo, un utilissimo programma in *javascript* per trovare le partizioni di Goldbach di singoli numeri pari. Ho quindi aggiunto subito, nella figura precedente, il numero delle partizioni per $N = 10^3$, 10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^7 e 10^8 .

Con lo stesso programma ho calcolato poi le partizioni per alcuni valori intermedi ai precedenti, ottenendo in un grafico log-log la seguente dispersione XY:

PARTIZIONI DI GOLDBACH



Il grafico mostra una distribuzione delle partizioni di Goldbach intorno ad una curva che presenta una leggera concavità verso l'alto, indice di continua crescita. Le partizioni appaiono quindi molteplici, in corrispondenza di ciascun numero pari N che si considera, e sembra agevole e sicura la costruzione di almeno una sequenza completa di numeri pari, fino al numero N considerato. Utilizzando la tavola di addizione, ho personalmente testato (a spot) un conteggio sequenziale, che si snoda entro un range di ordinate molto sottile (poche centinaia di unità), fino alla ragguardevole ascissa di 10^{12} ! Ve ne mostro uno stralcio intorno a 10^5 . I numeri primi me li ha forniti un altro programma in javascript, che ho pure inserito nei link in fondo all'articolo.



In corrispondenza di ciascun numero pari conteggiato si trova la sua partizione "minima", ottenibile con il programma di calcolo delle partizioni visto sopra. Nelle tabelle del test si può notare una sorprendente densità di dati utili intorno all'asse delle ascisse, che consente un agevole conteggio in sequenza dei numeri pari. Tale circostanza sarebbe dovuta a due fattori diversi che sembrano agire in concomitanza:

- la distanza (media) fra due numeri primi consecutivi cresce molto lentamente al crescere di N, essendo dello stesso ordine di grandezza di log N;
- al crescere di N si incontrano, con considerevole frequenza, numeri primi gemelli (in giallo).

Per effetto di una tale azione combinata, accade che le ascisse si diradano e si accumulano continuamente, in modo tale che i dati risultano distribuiti entro un'area delimitata superiormente dall'asse delle ascisse ed inferiormente da una curva ad andamento sinusoidale, a sua volta inviluppata, approssimativamente, dalla funzione *log N* di cui sopra. Si potrebbe studiare una tale configurazione alla ricerca di serie argomentazioni statistiche e probabilistiche a sostegno della congettura di Goldbach.

La maggior parte dei matematici ritiene che la congettura sia vera. Se non lo fosse, esisterebbe almeno un numero pari che non è la somma di due numeri primi, ossia un *contro-esempio*. Per trovarlo, si potrebbe impiegare il programma di calcolo delle partizioni (opportunamente limitato al solo calcolo delle partizioni minime, le prime di ogni lista) per verificare se, in corrispondenza di numeri pari sempre più grandi, esista sempre almeno una partizione di Goldbach. La ricerca svolta finora non ha fornito alcun contro-esempio: ad oggi è stato verificato che ogni numero pari inferiore a 4×10^{18} è la somma di due numeri primi.

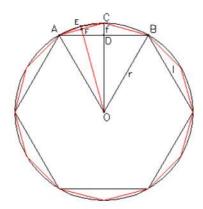
Tuttavia, approcci al problema di Goldbach come quello da noi usato possono solo suggerire un parere (favorevole alla veridicità nel nostro caso) ma non dimostrano la congettura in maniera rigorosa, cioè per ogni *N*.

Il problema resta quindi tutt'ora aperto.

Misura del cerchio

Ci proponiamo qui di impostare ed eseguire, su un foglio elettronico, il calcolo di π adoperando l'idea di Archimede di inscrivere in una circonferenza dapprima il poligono regolare di 6 lati (esagono regolare), poi (dividendo a metà gli angoli al centro) quello di 12 lati, poi di 24, 48 e 96 lati, calcolando per quest'ultimo un perimetro uguale:

"... al triplo del diametro più una certa porzione di esso che è più piccola di un settimo e più grande dei 10/71-mi del diametro stesso" che è il valore approssimato di π suggerito da Archimede.



Si abbia il cerchio di diametro unitario in figura e si inscriva in esso l'esagono regolare. Si divida per metà l'angolo AOB mediante la OC, poi (per metà) l'angolo AOC mediante la OE e si continui così indefinitamente, ottenendo la successione dei poligoni regolari di 12, 24, 48, ...ecc. lati, inscritti nella circonferenza, che associamo ai numeri interi positivi n (ad n=1 si associa l'esagono, ad n=2 il dodecagono, ecc.).

La freccia CD dell'arco AB, che indicheremo con f, vale:

$$CD = OB - (OB^2 - DB^2)^{1/2}$$
 cioè:
 $f_1 = r - (r^2 - (l_1 / 2)^2)^{1/2}$

Dove r è il raggio del cerchio ed l_1 il lato dell'esagono $(r = l_1 = 0, 5)$.

Si ha, in generale:

$$f_n = r - (r^2 - (l_n / 2)^2)^{1/2}$$

e le lunghezze dei lati dei poligoni in successione si calcolano:

$$l_{n+1} = (f_n^2 + (l_n / 2)^2)^{1/2}$$

Inserendo le formule in un foglio elettronico, nel seguente modo:

n	N. lati	f _n	I _n	p n
1	6	=0,5-(0,5^2-(D2/2)^2)^0,5	0,5	=+D2*B2
=+A2+1	=+B2*2	=0,5-(0,5^2-(D3/2)^2)^0,5	=+(C2^2+(D2/2)^2)^0,5	=+D3*B3
=+A3+1	=+B3*2	=0,5-(0,5^2-(D4/2)^2)^0,5	=+(C3^2+(D3/2)^2)^0,5	=+D4*B4
=+A4+1	=+B4*2	=0,5-(0,5^2-(D5/2)^2)^0,5	=+(C4^2+(D4/2)^2)^0,5	=+D5*B5
=+A5+1	=+B5*2	=0,5-(0,5^2-(D6/2)^2)^0,5	=+(C5^2+(D5/2)^2)^0,5	=+D6*B6
=+A6+1	=+B6*2	=0,5-(0,5^2-(D7/2)^2)^0,5	=+(C6^2+(D6/2)^2)^0,5	=+D7*B7
:	:		:	

si ottiene la tabella:

n	N. lati	f _n	l _n	p _n
1	6	0,06698729810778	0,500000000000000	3,00000000000000
2	12	0,01703708685547	0,25881904510252	3,10582854123025
3	24	0,00427756931309	0,13052619222005	3,13262861328124
4	48	0,00107053838070	0,06540312923014	3,13935020304687
5	96	0,00026770626182	0,03271908282178	3,14103195089051
6	192	0,00006693104522	0,01636173162649	3,14145247228546
7	384	0,00001673304130	0,00818113960394	3,14155760791186
8	768	0,00000418327782	0,00409060402623	3,14158389214832
9	1536	0,00000104582055	0,00204530629116	3,14159046322805
10	3072	0,00000026145521	0,00102265368034	3,14159210599927
11	6144	0,00000006536381	0,00051132690701	3,14159251669216
12	12288	0,00000001634095	0,00025566346186	3,14159261936538
13	24576	0,00000000408524	0,00012783173198	3,14159264503369
14	49152	0,00000000102131	0,00006391586612	3,14159265145077
15	98304	0,00000000025533	0,00003195793308	3,14159265305504
16	196608	0,000000000006383	0,00001597896654	3,14159265345610
17	393216	0,00000000001596	0,00000798948327	3,14159265355637
18	786432	0,00000000000399	0,00000399474164	3,14159265358144
19	1572864	0,000000000000100	0,00000199737082	3,14159265358770
20	3145728	0,000000000000025	0,00000099868541	3,14159265358927
21	6291456	80000000000000,0	0,00000049934270	3,14159265358966
22	12582912	0,000000000000000	0,00000024967135	3,14159265358976
23	25165824	0000000000000,0	0,00000012483568	3,14159265358979
		:	:	:

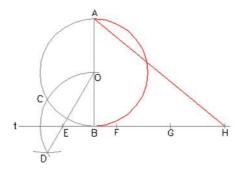
L'ultima colonna della tabella contiene la successione dei valori di $\,P_n\,$, perimetro dell'ennesimo poligono regolare inscritto nella circonferenza di diametro unitario. E' evidente che, per numero dei lati del poligono tendente ad infinito :

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\pi$$

Quadratura del cerchio

Il problema della rettificazione della circonferenza e quello equivalente della quadratura del cerchio, non possono essere risolti alla maniera degli antichi greci, cioè con l'uso esclusivo di riga e compasso.

Tuttavia, esistono soluzioni approssimate di questo problema. Una di queste fu scoperta nel 1685 da *Adam Kochansky*, un Gesuita che lavorava come bibliotecario del re Giovanni di Polonia.



In figura è illustrata la "quadratura approssimata del cerchio di Kochansky". In effetti si tratta (linee in rosso) del problema della rettificazione di una semicirconferenza. La costruzione geometrica di Kochansky è stata realizzata impiegando *AutoCAD*, nel modo seguente:

Si sono tracciati:

- un cerchio di centro O e diametro AB ed una retta t tangente al cerchio nel punto B;
- con centro in B, un arco di raggio BO che interseca il cerchio nel punto C;
- con centro in C e con la stessa apertura di compasso, un secondo arco, che interseca il primo nel punto D:
- la retta DO, che interseca la retta t nel punto E.

Poi, tenendo sempre fissa l'apertura del compasso sul valore iniziale *BO*, si sono riportati successivamente, partendo da *E*, i punti *F*, *G*, ed *H* (*EF=FG=GH=BO*). Infine si sono uniti i punti *A* ed *H*.

Avendo eseguito la costruzione con un'apertura del compasso BO = 1, secondo i calcoli di Kochansky, il segmento AH così ottenuto dovrebbe valere: (1)

$$AH = 3.141533$$

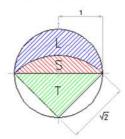
che è appunto l'approssimazione di π trovata da Kochansky, con un errore di circa 1 su 16000.

AutoCAD ci dà la possibilità di verificare subito tale grado di precisione. Usando il comando "List" sull'oggetto segmento *AH*, si ottiene infatti in "Text Window" il seguente output:

La lunula di Ippocrate

Abbiamo visto come il cerchio non possa essere quadrato che in maniera approssimata. Tuttavia, con semplici procedimenti geometrici, è possibile quadrare esattamente alcune parti del cerchio, come ad esempio la "lunula di Ippocrate".

Consideriamo in figura la "lunula" (parte tratteggiata in blu) delimitata dai due archi di circonferenza aventi raggio $1 e 2^{1/2}$ rispettivamente. Cerchiamo di quadrare questa parte di cerchio, cioè determiniamone l'area attraverso la costruzione (con riga e compasso) di una figura ad essa equivalente.



Distinguiamo, oltre alla lunula sopra detta che indichiamo con la lettera L, le seguenti altre due figure: il segmento circolare S tratteggiato in rosso ed il triangolo T tratteggiato in verde.

L'area del guarto di cerchio composto dalle figure T ed S vale:

$$T+S=(1/4)\cdot (2^{1/2})^2 \cdot \pi = \pi/2$$

L'area del semicerchio composto dalle figure L ed S vale:

$$L+S = \pi/2$$

quindi si ha: $T = \pi/2 - S$ ed

 $L = \pi/2 - S$, cioè: L = T.

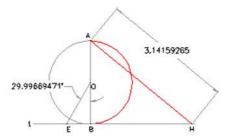
Il triangolo T è la figura che volevamo costruire. (2)

Note

(1) Calcolando, si ha:

EB = OB•
$$tan30$$
° = 0,577350
BH = 3 - EB = 2,422650
AH = $(AB^2 + BH^2)^{1/2}$ = 3,141533

L'approssimazione di Kochansky si ottiene quindi con un angolo EOB di $30\,^\circ$, che è costruibile con riga e compasso, come richiesto. Viene da chiedersi quale sia il valore dell'angolo EOB che "costruisce" esattamente π . Impiegando ancora AutoCAD ed eseguendo la costruzione al contrario, si è ottenuto il risultato mostrato nella figura seguente:



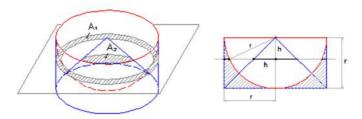
Il valore di *EOB* che dà π è molto vicino a 30 °.

(2) Se si considera poi che il triangolo T equivale ad un quadrato di lato = 1, il termine "quadratura" risulta qui propriamente detto.

Sulla sfera e il cilindro

Il volume della sfera è 2/3 di quello di un cilindro avente per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa.

Di questo importante risultato di Archimede daremo qui un'altra dimostrazione, seguendo un ragionamento dovuto a Luca Valerio, matematico del 500 molto stimato da Galilei.



Sia dato un cilindro avente base di raggio r ed altezza r, e si inscrivano in esso una mezza sfera ed un cono, come in figura. Consideriamo il cono ed il solido che si ottiene sottraendo la sfera dal cilindro. Tagliando queste due figure con un piano parallelo alla base, si ottengono due sezioni concentriche: una corona circolare A_1 ed un cerchio A_2 . Il cerchio interno della corona circolare ha per raggio il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa r ed altro cateto h, perciò la sua area è:

$$A_i = p \cdot (r^2 - h^2)$$

L'area del cerchio esterno della corona vale:

$$A_e = p \cdot r^2$$

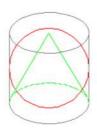
quindi l'area della corona vale:

$$A_1 = A_e - A_i = p \cdot r^2 - p \cdot (r^2 - h^2) = p \cdot h^2$$

ma questo valore coincide con quello dell'area della sezione sul cono:

$$A_2 = p \cdot h^2$$

Questo risultato di uguaglianza vale per tutti i possibili piani sezionanti paralleli alla base delle figure. Luca Valerio, considerando le figure in confronto come composte dagli infiniti "fogli" di spessore infinitesimo generati dai piani sezionanti, giunge a concludere che i due volumi, essendo composti da fogli di area uguale sono uguali (1). Ma il volume del cono è un terzo di quello del cilindro (2). Allora il volume della mezza sfera è uguale a due terzi di quello del cilindro. Raddoppiando si ottiene l'enunciato del teorema che si voleva dimostrare.



In bella sintesi, questi risultati possono essere detti, con riferimento alla figura schematica qui a fianco (3), nel modo seguente:

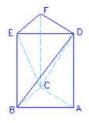
I tre volumi: del cono, della sfera e del cilindro, stanno fra loro come i numeri 1,2 e 3.

Note

(1) Questo è il metodo degli *indivisibili* introdotto da Bonaventura Cavalieri nel 1635. Si sa ora, da un ritrovamento su pergamene avvenuto nel 1906 (v. Metodo), che questo metodo, che anticipa il calcolo infinitesimale, risaliva ad Archimede. Cavalieri l'ha semplicemente "riscoperto" dopo ben 1850 anni!

(2) Euclide - Gli elementi - Libro XII - Proposizione 7:

Ogni prisma che abbia base triangolare si divide in tre piramidi uguali fra loro aventi basi triangolari.



Con riferimento alla figura, è evidente che: ABDC=BEDC; BCED=CFED; CDFE=CADB c.v.d.

Per estendere a cilindro-cono basta considerare il cerchio di base come composto da triangoli. Una composizione può essere ottenuta dalla figura che compare nell'articolo "Misura del cerchio", prendendo i 6 triangoli equilateri dell'esagono ed aggiungendo i triangoli perimetrali che formano successivamente i poligoni di 12, 24, 48, ecc. lati, all'infinito.

(3) Si dice che Archimede volesse incisa sulla sua pietra tombale una figura simile, a ricordo della sua grande scoperta. E si dice che questa volontà fu fatta eseguire dal console Marcello. Cicerone racconta che al tempo in cui era questore in Sicilia, la curiosità lo spinse a cercare la tomba di Archimede, e trovandosi un giorno fuori della porta di Siracusa, vide tra altre tombe una colonna con su incisa la figura di una sfera ed un cilindro. Fatto sgombrare il sito dagli sterpi riconobbe, dalle iscrizioni corrose dal tempo, che quella era proprio la tomba di Archimede che cercava.

La superficie della sfera

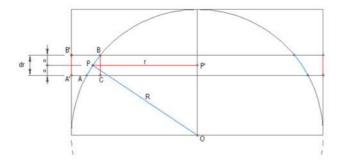
Dimostreremo la proposizione che segue ricorrendo ancora una volta al metodo degli *indivisibili* di Cavalieri.

La superficie della sfera è uguale alla superficie laterale di un cilindro avente per base il cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa.

Questa affermazione dice anche che la superficie della sfera è 4 volte il suo cerchio massimo. Infatti:

$$S = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Consideriamo due generici piani orizzontali distanti dr che tagliano le superfici della sfera e del cilindro, come in figura.



Dimostriamo che la superficie laterale del cilindro elementare di altezza A'B' = dr è uguale alla superficie generata dalla rivoluzione del segmento AB intorno all'asse OP', cioè:

$$dr \cdot 2\pi R = AB \cdot 2\pi r$$

che equivale a dire:

$$dr \cdot R = AB \cdot r$$

oppure:

$$dr/r = AB/R$$

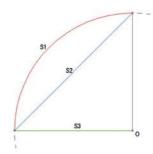
Ma questa proporzione è evidente nella figura, data la similitudine dei triangoli *OPP'* ed *ABC*, formati da rette perpendicolari fra loro.

Se si prendono le distanze *dr* infinitamente piccole, in modo da rettificare gli archi *APB*, allora, sommando tutte le superfici elementari del cilindro e della sfera, si ottengono due superfici uguali. *C.V.D.*

Da quanto sopra dimostrato, discende una interessante proporzione:

La superficie laterale di un cono avente base di raggio R ed altezza R, è media proporzionale fra la superficie lat. di una semisfera di raggio R e la superficie di un cerchio di raggio R. con rapporto di proporzionalità = $\sqrt{2}$

Mostriamo per semplicità solo le generatrici delle tre figure (che si ottengono per rivoluzione di queste intorno all'asse verticale passante per il punto *O*):



Calcoliamo S1/S2:

$$S1/S2 = 2\pi R^2 / \pi R^2 \sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

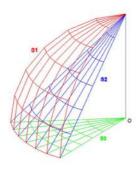
calcoliamo poi S2/S3:

$$S2/S3 = \pi R^2 \sqrt{2} / \pi R^2 = \sqrt{2}$$

per cui vale quanto sopra enunciato, cioè:

$$S1/S2 = S2/S3 = \sqrt{2}$$

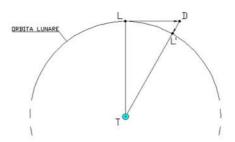
Essendoci liberati nei calcoli del fattore 2π la proporzione vale anche per una qualsiasi rotazione parziale delle tre generatrici intorno all'asse verticale passante per O, cioè nel caso più generale del semi-spicchio. Si giunge così alla forma classica dell'enunciato, applicato alle "unghie" o semi-spicchi: sferico, conico e piano:



La mela di Newton

La forza che causa la caduta di una mela sulla Terra è della stessa natura di quella che mantiene la Luna in orbita intorno alla Terra.

Questa grande intuizione di Newton, che condusse alla scoperta della Gravitazione Universale, sarà qui dimostrata confrontando il risultato di un calcolo geometrico-cinematico con quello del calcolo gravitazionale.



Siano:

 $TL = 3.84*10^8 \text{ m}$

distanza Terra-Luna, in prima approssimazione

 $p = 2.36*10^6 \text{ sec}$

periodo di rivoluzione della Luna

v = sviluppo orbita / p == $2^* \pi *3.84*10^8 / 2.36*10^6 =$

 $= 1.02234*10^3 \text{ m/sec}$ velocità orbitale

 $q = 9.8062 \text{ m/sec}^2$

accelerazione di gravità sulla superficie terrestre

 $R = 6.37*10^6 \text{ m}$

raggio della Terra

 $g' = g^* R^2 / TL^2 =$ = 2,6985*10⁻³ m/sec²

accelerazione di gravità sull'orbita lunare

A - Calcolo geometrico-cinematico

In assenza di forze esterne la Luna, con moto rettilineo uniforme, percorrerebbe in un secondo la distanza *LD*:

$$LD = v^*1 = 1022.34 \text{ m}$$

La Luna invece resta sull'orbita nel punto L', che si trova sulla congiungente DT. Calcoliamo geometricamente la distanza DL':

$$DL' = (TL^2 + LD^2)^{1/2} - TL' = 1,3609*10^3 \text{ m}$$

B - Calcolo gravitazionale

In effetti, a causa della forza di gravità esercitata dalla Terra, la Luna cade dal punto D al punto L' percorrendo in un secondo lo spazio DL' che vale:

$$DL' = \frac{1}{2} g'^* t^2 = \frac{1}{2} 2,6985^* 10^{-3} *1 = 1,3492^* 10^{-3} m$$

Come si vede, il calcolo meccanico fornisce per *DL'* lo stesso valore (a meno delle approssimazioni fatte) del calcolo geometrico. Quindi, la forza che trattiene la Luna in orbita è la gravità terrestre.

Vediamo ora come si può usare un foglio elettronico per ottenere il valore della distanza Terra-Luna, in corrispondenza del quale si ottengono due risultati uguali per la distanza *DL'*.

Inserite in testa tutte le grandezze della nostra discussione, nella prima riga si immettono i dati e le formule sopra utilizzate, nel modo seguente:

Si copia poi in basso il contenuto di tutte le celle della prima riga escluso il valore di *TL*. Quindi si fa variare, nella prima colonna, il valore di *TL* fino ad ottenere nelle colonne *5* e *9* l'uguaglianza dei valori di *DL*':

TL	р	v	LD	DL'	g	R	g'	DL'
384000000	2375000	1015,8919	1015,8919	0.00134379	9,8062	6367472	0,002696	0,00134816
384050000	2375000	1016,0241	1016,0241	0.00134397	9,8062	6367472	0,002696	0,00134781
384100000	2375000	1016,1564	1016,1564	0,00134414	9,8062	6367472	0,002695	0,00134746
384150000	2375000	1016,2887	1016,2887	0,00134432	9,8062	6367472	0,002694	0,00134711
384200000	2375000	1016,4210	1016,4210	0,00134450	9,8062	6367472	0,002694	0.00134676
384250000	2375000	1016,5532	1016,5532	0,00134468	9,8062	6367472	0,002693	0,00134641
384300000	2375000	1016,6855	1016,6855	0,00134486	9,8062	6367472	0,002692	0.00134606
384350000	2375000	1016,8178	1016,8178	0,00134504	9,8062	6367472	0,002691	0,00134571
384400000	2375000	1016,9501	1016,9501	0,00134516	9,8062	6367472	0,002691	0,00134536
384402000	2375000	1016,9554	1016,9554	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134534
384404000	2375000	1016,9607	1016,9607	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134533
384406000	2375000	1016,9659	1016,9659	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134532
384408000	2375000	1016,9712	1016,9712	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134530
384410000	2375000	1016,9765	1016,9765	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134529
384412000	2375000	1016,9818	1016,9818	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134527
384414000	2375000	1016,9871	1016,9871	0.00134528	9,8062	6367472	0,002691	0,00134526
384416000	2375000	1016,9924	1016,9924	0,00134528	9,8062	6367472	0,002690	0,00134525
384418000	2375000	1016,9977	1016,9977	0,00134522	9,8062	6367472	0,002690	0,00134523

Il valore trovato di $3,8441*10^8~m$ per la distanza Terra-Luna, concorda, come deve essere, con i risultati delle più recenti misurazioni laser, che forniscono un valore medio di 384.400~Km.

Problema delle noci di cocco

Ecco qui un esempio di come sia possibile impiegare un foglio elettronico per trovare la soluzione di un complicato problema di matematica presentato agli inizi del 900 e noto come il "problema delle noci di cocco".

Cinque uomini fanno naufragio su un'isola. Non trovano niente da mangiare tranne moltissime noci di cocco; inoltre trovano una scimmia. Decidono allora di dividere le noci di cocco in cinque parti uguali lasciando quanto resta alla scimmia.

Nel mezzo della notte, uno dei naufraghi sente improvvisamente fame e decide di prendersi subito la sua parte di noci di cocco. Nel far questo scopre che, dividendo per cinque il numero di noci, si ha come resto 1; così egli dà una noce di cocco alla scimmia, prende il suo quinto e riammassa tutte le altre noci. Poco dopo si sveglia un secondo naufrago e fa esattamente la stessa cosa: dà alla scimmia una noce, prende il suo quinto e riammassa il resto. Lo stesso fanno gli altri tre.

La mattina dopo tutti si alzano, dividono quanto resta delle noci in parti uguali e trovano ancora una noce di resto da lasciare alla scimmia.

Quante erano all'inizio le noci di cocco?

I calcoli possono essere organizzati su un foglio elettronico nel modo seguente.

Nel primo campo si elencano i possibili numeri interi che danno le ipotetiche quantità del monte finale delle noci. Nei cinque campi successivi si introducono le formule di calcolo per ottenere, a ritroso, le quantità di noci che ciascun naufrago trova di notte a propria disposizione. Il sesto campo conterrà quindi i valori del monte iniziale delle noci.

Vediamo ora quali sono i valori da introdurre nel primo campo. Analizzando le azioni del mattino, questi numeri devono essere numeri divisibili per 5 aumentati di 1; inoltre, affinché da essi si possa ricostruire il monte precedente aggiungendo 1/4, devono essere numeri divisibili per 4. Per ottenerli, usiamo il foglio elettronico nel modo seguente:

	n	n+1	(n+1)/4
Г	5	6	1,5
	10	11	2,75
	15	16	4
	20	21	5,25
Е	25	26	6,5
	30	31	7,75
	35	36	9
	40	41	10,25
Г	45	46	11,5
Г	50	51	12,75
	55	56	14
Е	eco		

La sequenza dei numeri da inserire nel primo campo è data dai numeri evidenziati in giallo della seconda colonna. Il primo numero è 16 e gli altri si ottengono sommando successivamente al primo il numero 20 (che è il più piccolo numero divisibile per 5 e per 4). Per ricostruire le quantità dei monti nei campi successivi basterà aumentare di 1/4 le quantità del campo precedente e sommare 1. Ciò si ottiene con una formula del tipo +A1*1,25+1 (valevole ad esempio per la cella B1). Introdotte le formule in ciascun campo del primo record e copiando in basso, si ha la tabella che segue:

MONTE	5° MONTE	4° MONTE	3°	2°	MONTE
-			MONTE	MONTE	INIZIALE
16	21	27,25	35,0625	44,82813	57,03516
36	46	58,5	74,125	93,65625	118,0703
56	71	89,75	113,1875	142,4844	179,1055
76	96	121	152,25	191,3125	240,1406
96	121	152,25	191,3125	240,1406	301,1758
116	146	183,5	230,375	288,9688	362,2109
136	171	214,75	269,4375	337,7969	423,2461
156	196	246	308,5	386,625	484,2813
176	221	277,25	347,5625	435,4531	545,3164
196	246	308,5	386,625	484,2813	606,3516
216	271	339,75	425,6875	533,1094	667,3867
236	296	371	464,75	581,9375	728,4219
256	321	402,25	503,8125	630,7656	789,457
276	346	433,5	542,875	679,5938	850,4922
296	371	464,75	581,9375	728,4219	911,5273
316	396	496	621	777,25	972,5625
336	421	527,25	660,0625	826,0781	1033,598
356	446	5,855	699,125	874,9063	1094,633
376	471	589,75	738,1875	923,7344	1155,668
396	496	621	777,25	972,5625	1216,703
416	521	652,25	816,3125	1021,391	1277,738
:		:	:	1	:

Naturalmente, la soluzione che cerchiamo si troverà nel primo record contenente una sestupla di numeri interi:

1.0		• 0			
5096	6371	7964,75	9956,938	12447,17	15559,96
5116	6396	7996	9996	12496	15621
5136	6421	8027,25	10035,06	12544,83	15682,04
5.55				•	

Quindi all'inizio le noci di cocco erano 15621. Proseguendo la ricerca di sestuple intere nel foglio elettronico, ne troviamo una seconda:

10216	12771	15964,75	19956,94	24947,17	31184,96
10236	12796	15996	19996	24996	31246
10256	12821	16027,25	20035,06	25044,83	31307,04

e se ne incontrano altre ancora, tutte distanziate nel primo campo di 5120 unità:

MONTE INIZIALE	2" MONTE	3° MONTE	4° MONTE	5" MONTE	MONTE FINALE
15621	12496	9996	7996	6396	5116
31246	24996	19996	15996	12796	10236
46871	37496	29996	23996	19196	15356
62496	49996	39996	31996	25596	20476
78121	62496	49996	39996	31996	25596
93746	74996	59996	47996	38396	30716
109371	87496	69996	55996	44796	35836
124996	99996	79996	63996	51196	40956
140621	112496	89996	71996	57596	46076
156246	124996	99996	79996	63996	51196
171871	137496	109996	87996	70396	56316
:	:	-:		:	:

Si potrebbe perciò affermare, per il *principio di induzione*, che esistono infinite soluzioni di questo problema

Osservazioni

- 1. La tabella finale è interessante per alcune curiose regolarità in essa presenti, ad esempio: la sequenza dei valori del terzo monte si ottiene dal primo valore sommando successivamente il numero 10000, ed ancora: ogni record si ottiene dal precedente sommando i valori del primo record + 4.
- 2. Il premio Nobel per la fisica Paul Dirac, diede di questo problema una soluzione matematicamente corretta, il cui record, in una tabella costruita come sopra, sarebbe il seguente:

MONTE	5°	4°	3°	2"	MONTE
FINALE	MONTE	MONTE	MONTE	MONTE	INIZIALE
-4	-4	-4	-4	-4	-4

Ogni naufrago trova - 4 noci, ne sottrae una ottenendone - 5, ne prende 1/5 lasciandone così - 4 al naufrago successivo, o al monte finale. Questa soluzione è chiaramente irrealizzabile; se però alla tabella applichiamo la regola scoperta nella prima osservazione, secondo cui ogni record si otterrebbe dal precedente sommando i valori del primo record + 4, otteniamo un'altra soluzione, questa volta fin troppo realistica, che è quella in cui i naufraghi sono destinati a morire di fame, non avendo trovato sull'isola alcuna noce. Si può ancora osservare che la sestupla di Dirac si può ottenere applicando la regola sopra detta al primo record della tabella delle soluzioni, ma al contrario, cioè sottraendo da essi stessi i valori del primo record + 4; ciò a conferma della correttezza matematica della soluzione di Dirac. Si dice che questa soluzione negativa abbia avuto una certa influenza sul pensiero di Dirac, che poi avrebbe introdotto il concetto di antimateria.

3. Proseguendo con le osservazioni sul foglio elettronico generale, si può ancora notare che le sequenze dei risultati inter crescono ordinatamente in

corrispondenza dei record n. 1, 4, 16, 64, 256 (le potenze del numero 4):

REC.	MONTE	1	2	3	4	5
REC.	FINALE	5" MONTE	4" MONTE	3" MONTE	2º MONTE	1" MONTE
1	16	21				
4	76	96	121			
16	316	396	496	621		
64	1276	1596	1996	2496	3121	
256	5116	6396	7996	9996	12496	15621

Si intravede la possibilità di ottenere da questa tabella una formula per calcolare, per ogni record, il numero delle noci in corrispondenza dei vari monti, cioè la soluzione matematica del nostro problema.

Indicando con *n* il numero d'ordine del monte (numero verde) ed adoperando in modo appropriato i numeri 4 e 5, caratteristici del problema, si trova che:

I valori del campo "monte finale", che indicheremo con $M_l(r)$, dove r indica la posizione del record nella precedente tabella riassuntiva, si possono calcolare nel modo seguente:

$$M_f(r) = 5 \cdot 4^r - 4$$

ad esempio, per r=3:

$$M_f(3) = 5 \cdot 4^3 - 4 = 316$$

I valori dell'ennesimo monte al record r, che indicheremo con M(n,r), si ottengono reiterando n volte l'aggiunta di 1/4 + 1, cioè nel seguente modo tipico, valido per n=3, r=3:

$$M(3,3) = ((M_1(3) \cdot 5/4 + 1) \cdot 5/4 + 1) \cdot 5/4 + 1 =$$

$$= M_1(3) \cdot (5/4)^3 + (5/4)^2 + 5/4 + 1 =$$

$$= 316 \cdot (5/4)^3 + (5/4)^2 + 5/4 + 1 = 621$$

Generalizzando, si ottiene:

$$M(n,r) = M_f(r) \cdot (5/4)^n + (5/4)^{n-1} + \dots + (5/4)^{n-n}$$
 cioè:

$$M(n,r) = (5 \cdot 4^r - 4) \cdot (5/4)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (5/4)^k$$

che è infine la formula che si cercava.

La successione di Fibonacci

(Traduzione dal Liber Abbaci)

Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2. Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie. Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli. Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie. Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie. Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie. Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie. Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie. Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell' undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie. Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno. Puoi inoltre vedere in questo margine come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè I e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

Il contributo del Fibonacci alla scoperta della sua famosa "successione" è tutto qui! Probabilmente si tratta della semplice esposizione divulgativa di un problema già noto ai suoi tempi. Le meravigliose proprietà di questa successione sono state scoperte dagli studiosi in epoche successive.

Coppie 1 Primo Secondo 3 Terzo Ouarto Ouinto 13 Sesto 21 Settimo 34 Ottavo 55 Nono 89 Decimo 144 Undicesimo 233 Dodicesimo 377

La formula di Binet per i numeri di Fibonacci

La successione di Fibonacci è una successione di numeri interi naturali definita come segue:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \qquad \forall n \ge 2$$

$$F_0 = 0 \tag{1}$$

$$F_1 = 1$$

Lo sviluppo di tale successione è:

$$(F_n) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$
 (2)

La proprietà principale della successione è quella per cui:

$$\lim_{n \to \infty} F_n / F_{n-1} = \Phi \quad \text{(sezione aurea)}$$

dove:

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180339... \tag{4}$$

Naturalmente il rapporto fra F_n ed il suo successivo tenderà al reciproco della sezione aurea:

$$\lim_{n \to \infty} F_{n-1} / F_n = \phi = (1 - \sqrt{5}) / 2 = -0.6180339...$$
 (5)

Ogni elemento della successione di Fibonacci si ottiene dalla formula di Binet:

$$F_n = (\Phi^n - \phi^n) / \sqrt{5} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
 (6)

Per mostrare la validità della formula di Binet, consideriamo la differenza:

$$\Delta_n = \Phi_n - \phi_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n$$
(7)

Calcolando questa differenza in corrispondenza dei primi numeri naturali si ottiene:

$$\Delta_{0} = \Phi^{0} - \phi^{0} = 0$$

$$\Delta_{1} = \Phi^{1} - \phi^{1} = \sqrt{5}$$

$$\Delta_{2} = \Phi^{2} - \phi^{2} = \sqrt{5}$$
(8)

Si potrebbe a questo punto affermare che i due risultati precedenti, uguali fra loro e di valore $\sqrt{5}$, possono essere ottenuti *solo* servendosi del numero aureo e del suo reciproco. Infatti, dal sistema seguente:

$$x - y = \sqrt{5}$$

$$x^2 - y^2 = \sqrt{5}$$

si ottiene la soluzione unica:

$$x = (1+\sqrt{5})/2 = \Phi = 1,6180339...$$

$$y = (1-\sqrt{5})/2 = \phi = -0.6180339...$$

Il numero $\sqrt{5}\,\,$ sembra quindi essere un ottimo candidato per la costruzione di una successione:

$$(\Delta_n) = (F_n)\sqrt{5} = \{0,1\sqrt{5},1\sqrt{5},2\sqrt{5},3\sqrt{5},5\sqrt{5},8\sqrt{5},13\sqrt{5},\dots\}$$

Proseguendo infatti con i calcoli sopra interrotti, si ha:

$$\Delta_3 = \Phi^3 - \phi^3 = 2\sqrt{5}$$

$$\Delta_4 = \Phi^4 - \phi^4 = 3\sqrt{5} \tag{8}$$

$$\Delta_5 = \Phi^5 - \phi^5 = 5\sqrt{5}$$

La successione dei risultati prosegue per induzione matematica con valori che sono tutti multipli interi di $\sqrt{5}$ e che nel loro insieme ordinato riproducono esattamente la successione di Fibonacci. Si ha cioè:

$$\Delta_n = \Phi^n - \phi^n = F_n \sqrt{5} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
 (9)

e la validità della formula di Binet (6) risulta così verificata.

La formula di Binet appare a prima vista sorprendente per come da essa, costituita da elementi irrazionali, si ottengano variando n solo numeri naturali. In effetti si può vedere, eseguendo i calcoli (8) per trovare i Δ_n , come tutte le radici si elidano lasciando numeri naturali come risultato finale.

Eseguiamo ora una verifica di quanto sopra esposto utilizzando un foglio elettronico:

n	Fn	F _n /F _{n-1}	F _{n-1} /F _n	Φ	φ	$\Delta_n = \Phi^n - \varphi^n$	Φ ⁿ -φ ⁿ 5^0,5
0	0			1,618034	-0,618034	0,0000	0
1	1		0,0000000000000,0	1,618034	-0,618034	2,2361	1
2	11	1,00000000000000	1,000000000000000	1,618034	-0,618034	2,2361	1
3	2	2,00000000000000	0,50000000000000	1,618034	-0,618034	4,4721	2
4	3	1,50000000000000	0,6666666666667	1,618034	-0,618034	6,7082	3
5	5	1,66666666666667	0,600000000000000	1,618034	-0,618034	11,1803	5
6	8	1,60000000000000	0,62500000000000	1,618034	-0,618034	17,8885	8
7	13	1,62500000000000	0,6153846153846	1,618034	-0,618034	29,0689	13
8	21	1,6153846153846	0,6190476190476	1,618034	-0,618034	46,9574	21
9	34	1,6190476190476	0,6176470588235	1,618034	-0,618034	76,0263	34
10	55	1,6176470588235	0,6181818181818	1,618034	-0,618034	122,9837	55
11	89	1,6181818181818	0,6179775280899	1,618034	-0,618034	199,0100	89
12	144	1,6179775280899	0,618055555556	1,618034	-0,618034	321,9938	144
13	233	1,618055555556	0,6180257510730	1,618034	-0,618034	521,0038	233

La prima colonna del foglio contiene la successione dei numeri naturali.

La seconda mostra la corrispondente successione di Fibonacci.

Nella terza colonna si vede come i termini della successione (3) tendono alla sezione aurea Φ , per n tendente ad infinito.

Idem come sopra nella quarta colonna per i termini della successione (4), tendenti al numero ϕ .

Le colonne quinta e sesta servono per calcolare la settima.

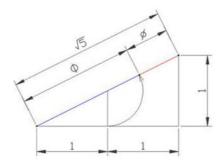
La settima colonna contiene la successione dei valori ottenuti sopra con le (8).

In ottava colonna sono elencati i valori ottenuti dalla formula di Binet (6) variando *n*, che corrispondono esattamente ai valori della seconda colonna, cioè alla successione di Fibonacci.

Modelli

Come al solito, anche questa volta ho cercato modelli geometrici, trovando per le formule (8) che calcolano le differenze Δ_n , le seguenti curiosità.

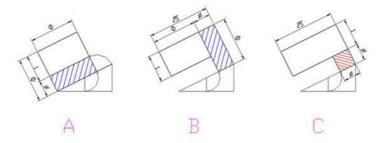
1 - Per Δ_1 si trova, nello spazio R :



Sull'ipotenusa del triangolo rettangolo in figura, che vale $\sqrt{5}$, si possono costruire i segmenti di lunghezza Φ e ϕ , come mostrato. Si vede come:

$$\Delta_1 = \Phi^1 - \phi^1 = \sqrt{5} u$$
 (unità lineari)

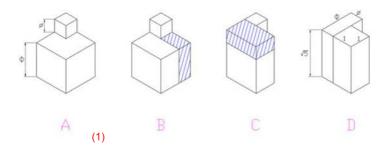
2 - Per Δ_2 si trova, nello spazio R^2 :



Il quadrato di lato Φ in fig. A può essere trasformato in B nella figura ad L di pari superficie. In fig. C si vede come:

$$\Delta_2 = \Phi^2 - \phi^2 = \sqrt{5} u^2$$

3 - Per Δ_3 si trova, nello spazio R^3 :



Per trasformazioni successive si ottiene dal solido in fig. A il solido in fig. C di pari volume. In fig. D si vede come tale solido possa essere scomposto nella somma di due parallelepipedi di volume pari a $\sqrt{5}\,u^3$, essendo: $\Phi-\phi=1$ e $\Phi*\phi=1$. Quindi si ha:

$$\Delta_3 = \Phi^3 - \phi^3 = 2\sqrt{5} u^3$$

(1) - Si tratta della stessa trasformazione usata a pag. 31

L'algoritmo di Euclide con AutoCad

L' algoritmo di Euclide, nella sua forma semplice, è un metodo per calcolare il massimo comun divisore (MCD) di due numeri interi positivi. Euclide descrisse questo metodo, basato su "sottrazioni successive", nel suo libro degli Elementi. Partendo da una coppia di interi positivi, egli forma successivamente nuove coppie, costituite ciascuna dal numero più piccolo della coppia precedente e dalla differenza fra i numeri della stessa coppia. Il processo termina con due numeri uguali, che è il MCD della coppia originale.

L'algoritmo si basa sulla seguente proprietà:

Se due numeri a e b sono divisibili per un terzo numero k, allora anche la loro differenza è divisibile per k.

Dimostrazione

Supponiamo a > b, allora:

 $a = k \cdot m$

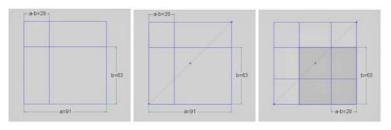
 $b = k \cdot n$

 $a-b=k\cdot (m-n)$

Si può quindi dire, nel caso particolare in cui k = MCD(a,b):

MCD(a,b) = MCD((a-b),b)

Nell'animazione di seguito linkata, è mostrata un'applicazione grafica dell'algoritmo euclideo per ottenere, usando AutoCAD, il *MCD* di due segmenti di retta, aventi lunghezze intere a e b. In essa, le "sottrazioni successive" si ottengono capovolgendo dei quadrati intorno alla diagonale, come segue:



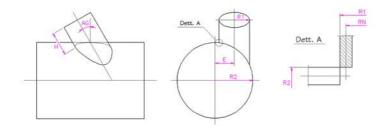
Si tratta tuttavia di una implementazione di scarso interesse pratico, essendovene di più efficienti, sempre derivate da Euclide, basate sulle "divisioni successive".

Un utilizzo pratico di AutoCAD

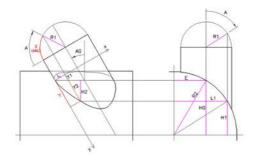
Vi presento ora una implementazione grafica di AutoCAD che, a differenza della precedente, ha un interesse pratico, essendo impiegabile nelle officine meccaniche per ottenere gli sviluppi in piano delle superfici 3D che maggiormente ricorrono nella tipologia costruttiva di componenti di Caldareria e Piping ricavati da lamiera.

Il caso in esame è quello dello sviluppo in piano di una intersezione obliqua fra cilindri. mostrata in figura:





Le formule necessarie per la creazione del programma, in linguaggio AutoLISP, sono ricavate dalla figura sequente:



$$L = R1 - R1 \times \cos A$$

$$Y1 = L \times \tan AG$$

$$H0 = \sqrt{R2^2 - E^2}$$

$$L1 = E + R1 \times \sin A$$

$$H1 = \sqrt{R2^2 - L1^2}$$

$$H2 = H0 - H1$$

$$Y2 = H2/\cos AG$$

$$Y = Y1 + Y2$$

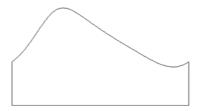
= R1 x A

Il listato del programma, da scrivere con l'editor dei testi di AutoCAD, è questo:

```
(DEFUN C:BOCC2 ()
   (GRAPHSCR)
      (SETQ AG (GETREAL "\nIMMETTERE ANGOLO AG: ")
            R1 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R1: ")
            RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
            R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
            E (GETREAL "\nIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
            H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
            P1 (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      )
         (SETQ P1 (LIST 0 0))
         (SETQ A (/ PI 90))
            (REPEAT 180
               (SETQ L (- R1 (* R1 (COS A)))
                     Y1 (* L (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180)
AG))))
                     HO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
                     L1 (+ E (* R1 (SIN A)))
                     H1 (SQRT (- (* R2 R2) (* L1 L1)))
                     H2 (- H0 H1)
                     Y2 (/ H2 (COS (* (/ PI 180) AG)))
                     Y (+ Y1 Y2)
                     K (/ RN R1)
                     X (* (* K R1) A) P2 (LIST X Y)
               )
                  (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
                  (SETQ P1 P2)
                  (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            )
                  (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- 0 H)))
                  (SETQ P4 (LIST 0 (- 0 H)))
                  (SETQ P5 (LIST 0 (CADR P2)))
                   (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
                  (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
                  (PRINC)
)
```

Questo programma, salvato nel file: BOCC2.LSP, può essere utilizzato come comando di AutoCAD, caricandolo dal menu "Tools" con "Load Application" (AutoCad 14).

Si ottiene il seguente output grafico utilizzabile per programmare un impianto automatico di taglio termico lamiere.



Seguono n. 25 programmi in AUTOLISP

70

TRACCIATURA DI COMPONENTI DI CALDARERIA E PIPING

Questo quaderno si rivolge principalmente ai Tecnici delle officine di prefabbricazione di componenti di caldareria e piping. Scopo del lavoro è fornire a costoro uno strumento che, attraverso l'uso del computer e con pochi dati in input, esegua immediatamente la tracciatura degli sviluppi in piano di quelle superfici 3D (e loro intersezioni) che maggiormente ricorrono nella pratica costruttiva dei componenti per caldareria e piping. Alle aziende che adoperano, per il taglio delle lamiere, impianti con pantografo a controllo numerico, si segnala che i programmi contenuti nel quaderno danno outputs grafici che sono subito utilizzabili per il "nesting" e la programmazione del taglio dei fogli di lamiera.

Nei 25 casi pubblicati in questo quaderno, gli oggetti sono trattati in forma parametrica. I parametri sono costituiti da un insieme di dati il cui numero è quello strettamente necessario per definire la geometria dell'oggetto in modo univoco. Al variare dei parametri (nel loro insieme di definizione) si ottengono le geometrie di tutti i possibili (infiniti) oggetti reali del caso considerato.

In una trattazione teorica, le superfici di intersezione considerate nei vari casi avrebbero avuto spessore = zero. Nella pratica, essendo i componenti reali ricavati da lamiera, si deve tenere conto dello spessore di questa. All'occorrenza introduce perciò il parametro "RN". La scelta delle superfici di intersezione è infatti legata al tipo di giunzione saldata adottato per l'unione dei componenti. Non sempre le superfici scelte coincidono con quelle cosiddette "neutre", quelle cioè che non subiscono alcuna deformazione, a causa dello stiramento o compressione delle fibre, in seguito alla calandratura delle lamiere. "RN" è quindi il "raggio neutro" da usare per il calcolo dello sviluppo della virola da calandrare. Per piccoli spessori e grandi raggi di curvatura, il raggio neutro è ben approssimato dal raggio medio della virola; in generale, RN è una funzione del raggio, dello spessore e del materiale della lamiera e si trova su tabelle nelle pubblicazioni specializzate.

Nella sezione "Formule" di ciascun articolo, sono riportate le modalità di costruzione grafica e le espressioni analitiche che se ne traggono e che sono servite per la stesura dei programmi AutoLISP. Una delle migliori funzioni di AutoCAD è la possibilità di software attraverso personalizzare บท linguaggio programmazione. Per la creazione dei programmi contenuti in questo quaderno si è utilizzato AutoLISP, che è il più semplice tra i linguaggi che comunicano con AutoCAD. I programmi AutoLISP sono stati scritti nell'editor di testi della versione DOS, che è accessibile direttamente dall'interno di AutoCAD digitando "EDIT". Ciascun programma, salvato in un file con estensione .LSP, può essere utilizzato in qualsiasi momento come un comando AutoCAD, caricandolo nell'editor grafico ed inserendone il nome al prompt di comando. Per caricare il programma (con la versione 14 di AutoCAD) si usa l'opzione "Load Application" che si trova nel menu "Tools". Prima di lanciare i programmi i modi "osnap" ed "ortho" devono essere disattivati.

Si vede quindi come gli strumenti prodotti con questo lavoro abbiano carattere "artigianale", essendo destinati ad utenti in possesso di requisiti minimi, quali l'accesso ad un computer in grado di eseguire la versione 12 o 13 di AutoCAD, sotto Windows o DOS, ed almeno le conoscenze di base del software per la grafica.

Una caratteristica comune a tutti i programmi AutoLISP realizzati è l'uso dei "cicli" per la creazione delle curve da una serie di vettori. Il numero dei vettori, che corrisponde al numero degli incrementi dell'angolo "A" per la ripetizione ciclica delle istruzioni, può essere variato a piacere, onde ottenere la "precisione" voluta della curva.

Per quel che riguarda l'affidabilità di ogni singolo programma, questa risulta garantita da quanto segue:

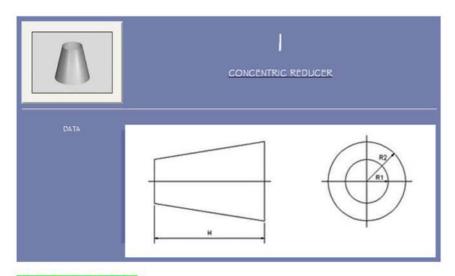
- o Sono stati sempre eseguiti test di "sovrapposizione" delle curve ottenute da ciascun programma con le stesse curve ottenute usando AutoCAD ed i metodi di costruzione grafica tradizionali.
- o Ciascun programma è stato poi utilizzato, almeno una volta, in casi reali con risultato favorevole.

Resta comunque la possibilità di verificare la correttezza dei singoli programmi attraverso una attenta analisi delle costruzioni grafiche, delle espressioni analitiche che ne derivano e dei listati AutoLISP contenuti in ciascun articolo della presente pubblicazione. Si compie così un esercizio che risulta altresì utile per chi voglia ripassare o approfondire gli argomenti.

NOTA

I programmi dal n.5 al n.16 risolvono una intera "famiglia" di intersezioni fra cilindri il cui caso più generale è trattato ai n. I I e I 2. Infatti, tutte le altre situazioni si ottengono da queste ultime azzerando opportunamente alcuni parametri.

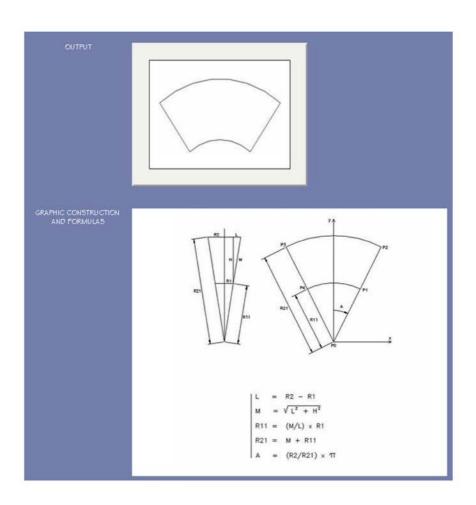
<u>PROGRAMS</u>						
1	CONCENTRIC REDUCER	2	EXCENTRIC REDUCER			
3	ELBOW - INNER SEGMENT	4	ELBOW - LAST SEGMENT			
5	STRAIGHT INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS NOZZLE	6	STRAIGHT INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS OPENING			
7	STRAIGHT AND EXCENTRIC INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS NOZZLE	8	STRAIGHT AND EXCENTRIC INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS OPENING			
9	OBLIQUE INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS NOZZLE	10	OBLIQUE INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS OPENING			
1.1	OBLIQUE AND EXCENTRIC INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS NOZZLE	12	OBLIQUE AND EXCENTRIC INTERSECTION BETWEEN CYLINDERS OPENING			
13	EGUAL TEE NOZZLE	14	EQUAL TEE OPENING			
15	OBLIQUE EQUAL TEE NOZZLE	16	OBLIQUE EQUAL TEE OPENING			
17	CYLINDER-SPHERE INTERSECTION NOZZLE	18	CYLINDER-TORUS INTERSECTION NOZZLE			
19	CYLINDER-CONE STRAIGHT INTERSECTION NOZZLE	20	CYLINDER-CONE STRAIGHT INTERSECTION OPENING			
21	CYLINDER-CONE STRAIGHT AND EXCENTRIC INTERSECTION NOZZLE	22	CYLINDER-CONE STRAIGHT AND EXCENTRIC INTERSECTION OPENING			
23	CYLINDER-CONE PARALLEL INTERSECTION NOZZLE	24	CYLINDER-CONE PARALLEL INTERSECTION OPENING			
25	SQUARE-CIRCLE REDUCER					

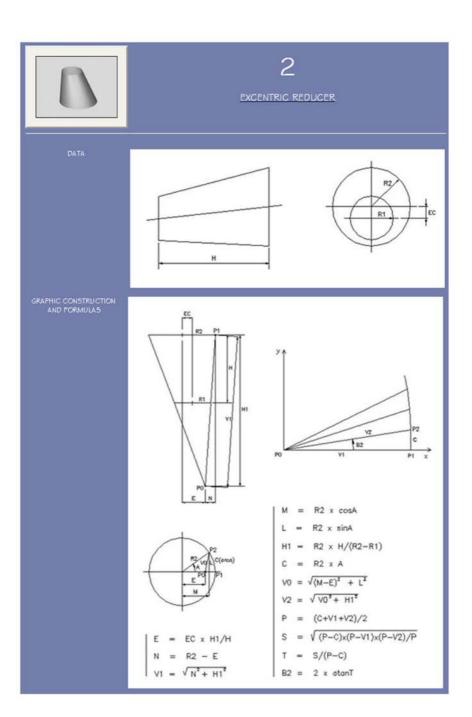


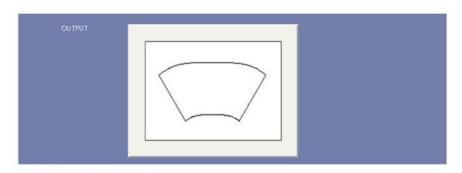
PROGRAM: CONO.Isp

```
(DEFUN C:CONO ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PO (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PO (LIST O O)
          L (- R2 R1)
          M (SQRT (+ (* L L) (EXPT H 2)))
          RII (* (/ M L) RI)
          R21 (+ M R11)
          A (* (/ R2 R2 I) PI)
      )
        (SETQ PI (POLAR PO (- (/ PI 2) A) RII)
            P2 (POLAR PO (- (/ PI 2) A) R2 I)
            P3 (POLAR PO (+ (/ PI 2) A) R2 I)
            P4 (POLAR PO (+ (/ PI 2) A) R I I)
        )
          (COMMAND "LINE" PI P2 ""
                 "ARC" "C" PO P2 P3 ""
                 "LINE" P3 P4 ""
                 "ARC" "C" PO PI P4 ""
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

75



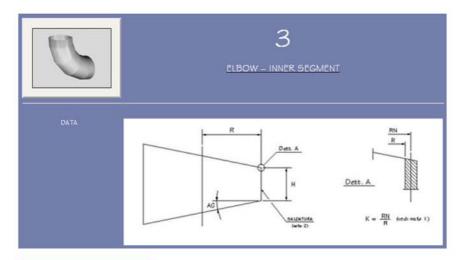




PROGRAM: COBB.Isp

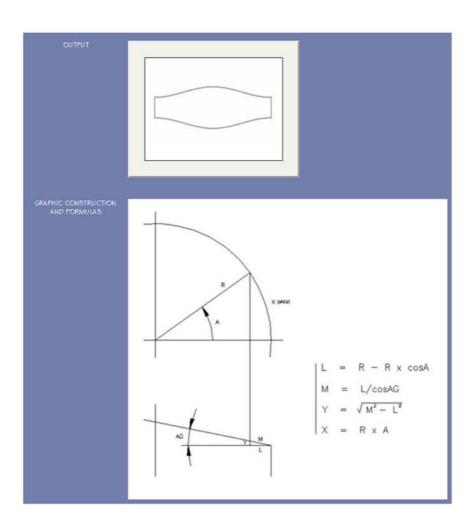
)

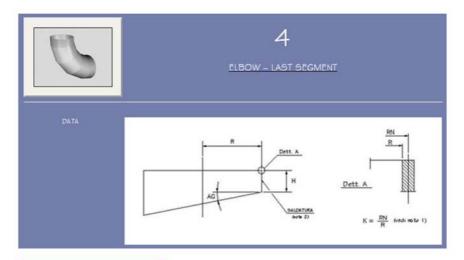
```
(DEFUN C:COBB ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        EC (GETREAL "INIMMETTERE ECCENTRICITA" EC: ")
        H (GETREAL "IMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ HI (/ (* R2 H) (- R2 RI)))
      (SETQ E (* EC (/ H I H)))
      (SETQ N (- R2 E))
      (SETQ VI (SQRT (+ (* N N) (EXPT HI 2))))
      (SETQ PI (LIST VI O))
      (SETQ PO (LIST O O))
      (SETQ BIO)
      (SETQ A (/ PI 90))
      (SETQ C (* R2 A))
        (REPEAT 90
          (SETQ M (* R2 (COS A))
               L (* R2 (SIN A))
               VO (SQRT (+ (* L L) (EXPT (- M E) 2)))
              V2 (SQRT (+ (* VO VO) (EXPT H I 2)))
              P (/ (+ (+ C VI) V2) 2)
              DI (-PC)
              D2 (- P VI)
              D3 (- P V2)
              5 (SQRT (/ (* D1 (* D2 D3)) P))
              T ((5 DI)
              B2 (+ (* (ATAN T) 2) B1)
              P2 (POLAR PO B2 V2)
          )
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ VI V2)
            (SETQ BI B2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "COPY" "ALL" "" PO PO "")
            (SETQ K (/ (- H I H) H I ))
            (COMMAND "SCALE" "PREVIOUS" "" PO K "")
            (COMMAND "LINE" PI PO "")
            (COMMAND "MIRROR" "ALL" "" PO (LIST I O) "")
            (COMMAND "TRIM" "ALL" "" PO PO "")
            (COMMAND "ROTATE" "ALL" "" PO 90 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
                                                 78
```



PROGRAM: SPICCHI.lsp

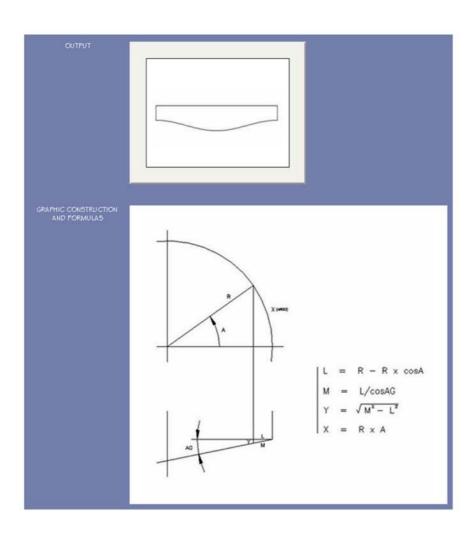
```
(DEFUN C:SPICCHI ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ AG (GETREAL "InIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE 1/2 ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (- R (* R (COS A)))
                M (/ L (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y (SQRT (- (* M M) (EXPT L 2)))
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 "")
            (COMMAND "LINE" P4 P5 "")
            (COMMAND "MIRROR" "ALL" "" P3 P4 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (COMMAND "UCS" "P")
            (PRINC)
)
```

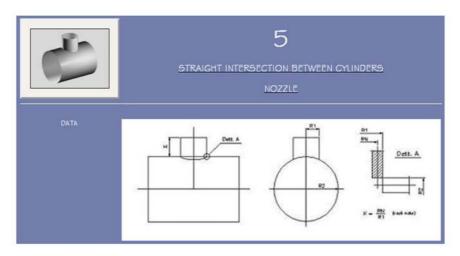




PROGRAM: MSPICCHI.lsp

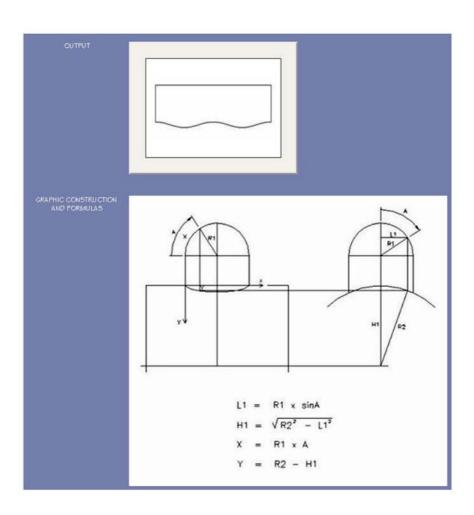
```
(DEFUN C:MSPICCHI ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ AG (GETREAL "\nIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (- R (* R (COS A)))
                M (/ L (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y (SQRT (- (* M M) (EXPT L 2)))
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

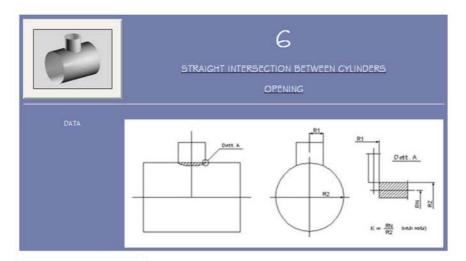




PROGRAM: BOCCH.lsp

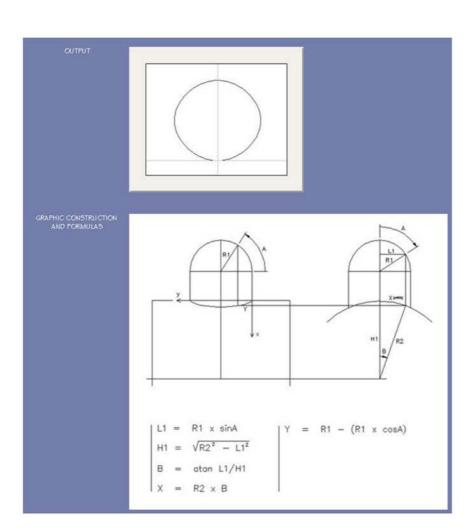
```
(DEFUN C:BOCCH ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ LI (* RI (SIN A))
                HI (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT LI 2)))
               Y (- R2 H1)
               K (/RNRI)
               X (* (* K R I ) A) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (COMMAND "UCS" "P")
            (PRINC)
)
```

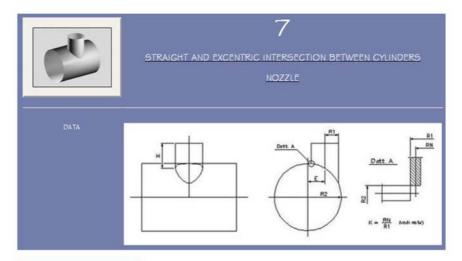




PROGRAM: BOCH.Isp

```
(DEFUN C:BOCH ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ LI (* RI (SIN A))
                HI (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT LI 2)))
                B (ATAN (/ LI HI))
               Y (* RI (- I (COS A)))
                K (/ RN R2)
                X (* (* K R2) B) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

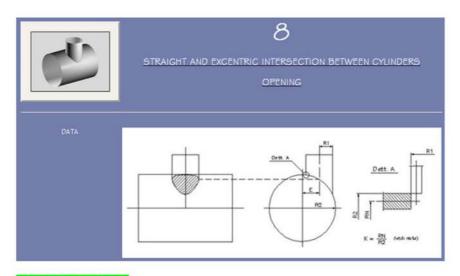




PROGRAM: BOCC.Isp

```
(DEFUN C:BOCC ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        E (GETREAL "InIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ LI (+ (* RI (SIN A)) E)
                HO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
                HI (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT LI 2)))
               Y (- HO HI)
                K (/ RN RI)
                X (* (* K R I ) A) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

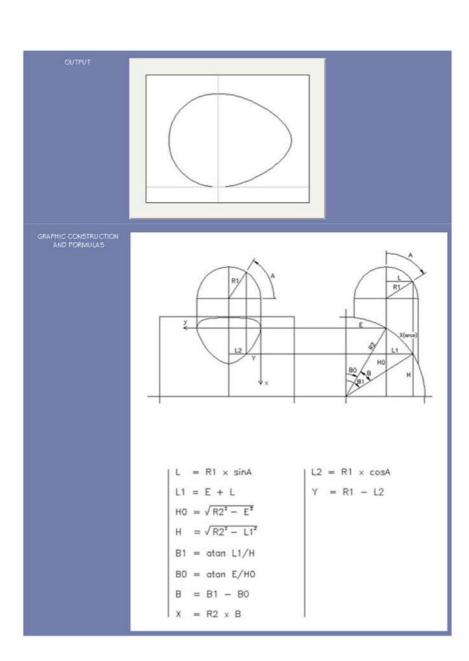
H1 $HO = \sqrt{R2^2 - E^2}$ $| X = R1 \times A$ $L1 = E + R1 \times sinA$ $H1 = \sqrt{R2^2 - L1^2}$ Y = H0 - H1

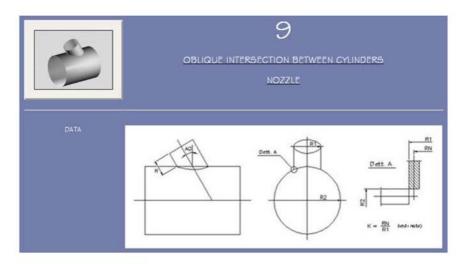


PROGRAM: BOC.lsp

```
(DEFUN C:BOC ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        E (GETREAL "\nIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
        PI (GETPOINT "\nIMMETTERE PUNTO INIZIALE:")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* RI (SIN A))
              LI (+ E L)
              HO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
              H (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT L1 2)))
              BI (ATAN (/ LI H))
              BO (ATAN (/ E HO))
              B (- BI BO)
              L2 (* RI (COS A))
              Y (- RI L2)
              K (/ RN R2)
              X (* (* K R2) B) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

89

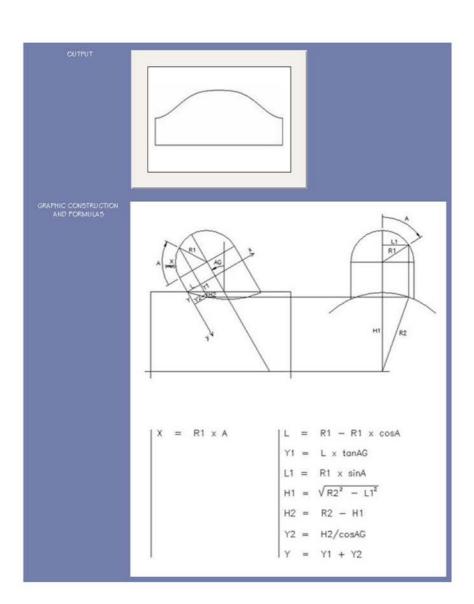


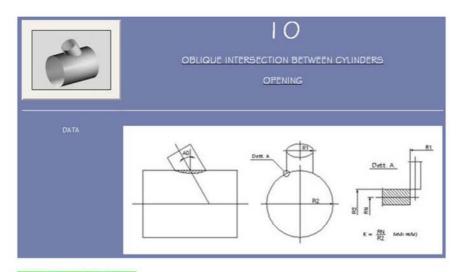


PROGRAM: BOCC1.lsp

)

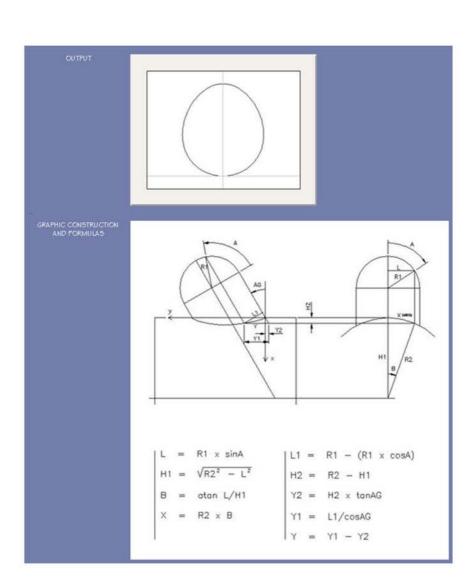
```
(DEFUN C:BOCCI ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ AG (GETREAL "IMMETTERE ANGOLO AG: ")
        RI (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RI: ")
        RN (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        R2 (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO R2:")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (- RI (* RI (COS A)))
                YI (* L (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
                LI (* RI (SIN A))
                HI (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT LI 2)))
                H2 (- R2 H1)
                Y2 (/ H2 (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y (+ Y1 Y2)
                K (/RNRI)
                X (* (* K R I ) A) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (COMMAND "UCS" "P")
            (PRINC)
```

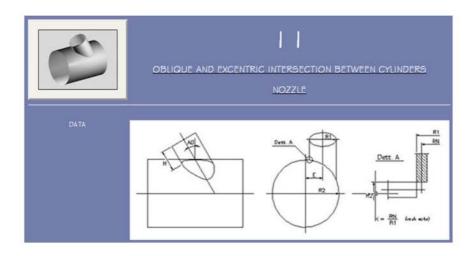




PROGRAM: BOC1.lsp

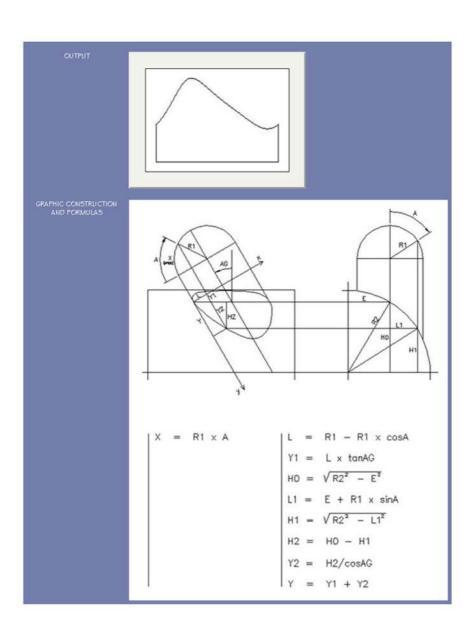
```
(DEFUN C:BOCI ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        AG (GETREAL "\nIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* RI (SIN A))
                HI (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT L 2)))
                B (ATAN (/ L H I))
                H2 (- R2 H1)
                LI (* RI (- I (COS A)))
                YI (/ LI (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y2 (* H2 (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
                Y (- Y1 Y2)
                K (/ RN R2)
                X (* (* K R2) B) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
                                     93
)
```

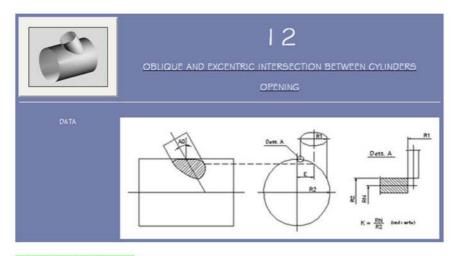




PROGRAM: BOCC2.lsp

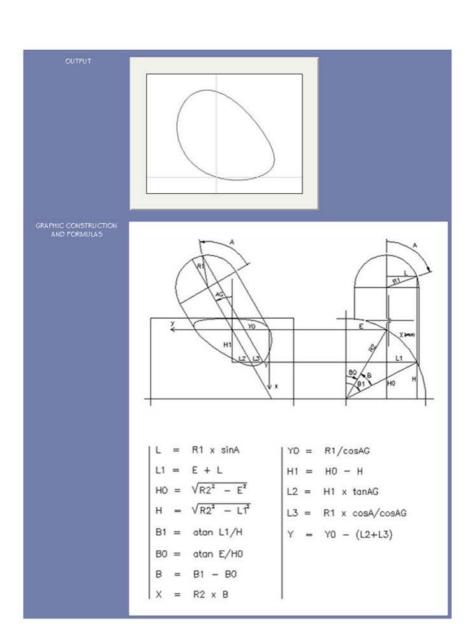
```
(DEFUN C:BOCC2 ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ AG (GETREAL "INIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        RI (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        RN (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        R2 (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        E (GETREAL "\nIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (- RI (* RI (COS A)))
              YI (* L (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
              HO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
              LI (+ E (* RI (SIN A)))
              HI (SQRT (- (* R2 R2) (* LI LI)))
              H2 (- HO H1)
              Y2 (/ H2 (COS (* (/ PI 180) AG)))
              Y (+ Y1 Y2)
              K (/ RN RI)
              X (* (* K R I ) A) P2 (LIST X Y)
             (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
             (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
             (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
             (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
             (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
             (PRINC)
                                             95
)
```

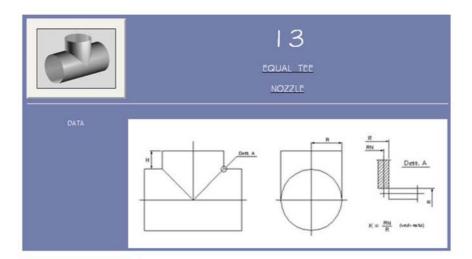




PROGRAM: BOC2.lsp

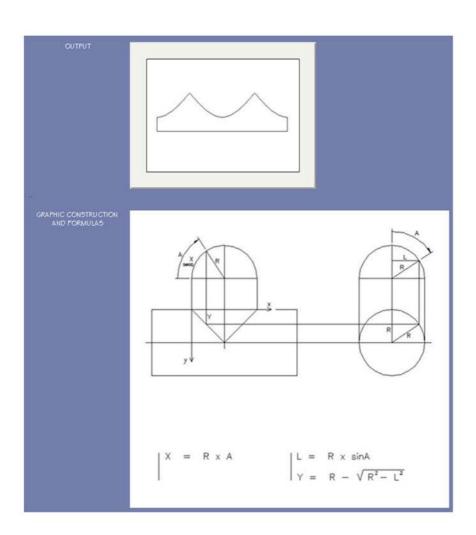
```
(DEFUN C:BOC2 ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        R2 (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO R2: ")
        RN (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        AG (GETREAL "INIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        E (GETREAL "INIMMETTERE ECCENTRICITA" E: ")
        PI (GETPOINT "IMMETTERE PUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* RI (SIN A))
              LI (+ E L)
              HO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
              H (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT L1 2)))
              BI (ATAN (/ LI H))
              BO (ATAN (/ E HO))
              B (- BI BO)
              YO (/ RI (COS (* (/ PI 180) AG)))
              HI (- HO H)
              L2 (* H1 (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
              L3 (* (/ R1 (COS (* (/ P1 180) AG))) (COS A))
              Y (- YO (+ L2 L3))
              K (/ RN R2)
              X (* (* K R2) B) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

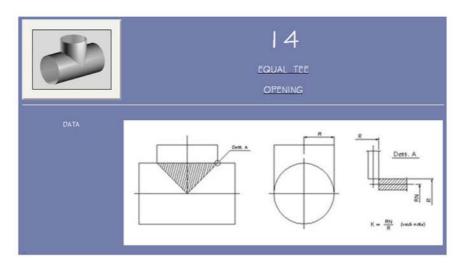




PROGRAM: TEE.Isp

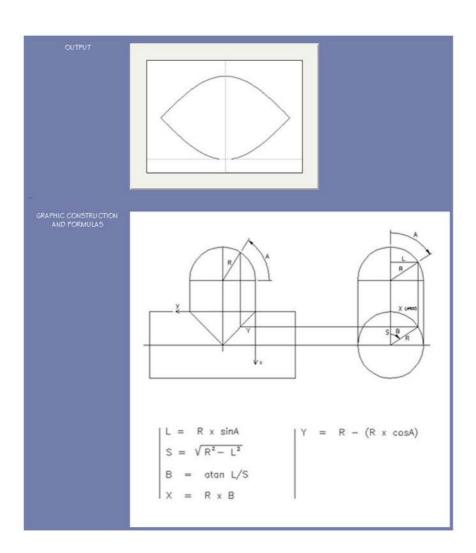
```
(DEFUN C:TEE ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* R (SIN A))
                Y (- R (SQRT (- (* R R) (EXPT L 2))))
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

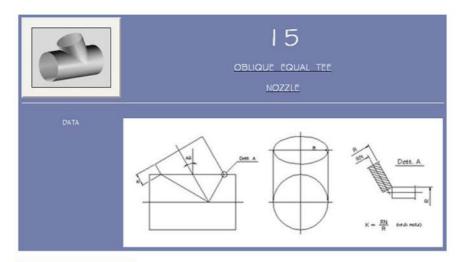




PROGRAM: TEE1.lsp

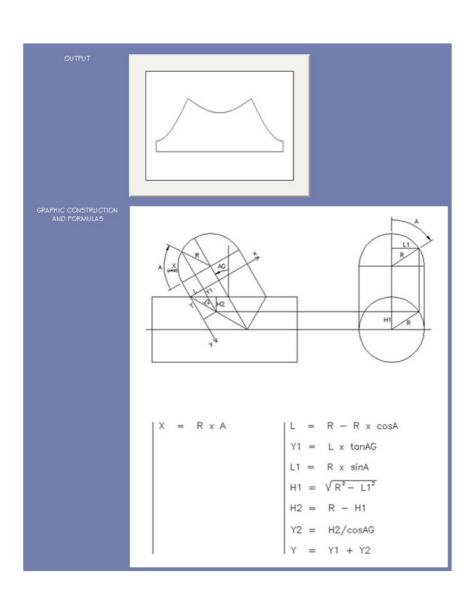
```
(DEFUN C:TEE I ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* R (SIN A))
                S (SQRT (- (* (* R R) 1.00000001) (EXPT L 2)))
                B (ATAN (/ LS))
                Y (* R (- I (COS A)))
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) B) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

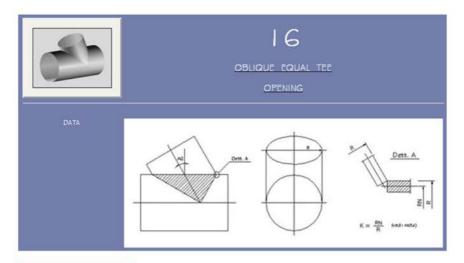




PROGRAM: TEE2.lsp

```
(DEFUN C:TEE2 ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ AG (GETREAL "INIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        H (GETREAL "InIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (- R (* R (COS A)))
                YI (* L (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
                LI (* R (SIN A))
                Y2 (/ (- R (SQRT (- (* R R) (EXPT L1 2)))) (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y (+ Y1 Y2)
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ P1 P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- O H)))
            (SETQ P4 (LIST O (- O H)))
            (SETQ P5 (LIST O O))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

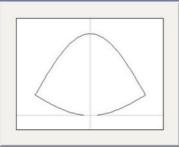




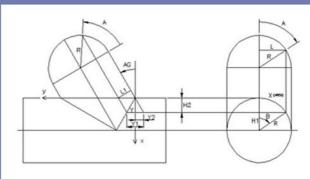
PROGRAM: TEE3.lsp

```
(DEFUN C:TEE3 ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        AG (GETREAL "\nIMMETTERE ANGOLO AG: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PI (LIST O O))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* R (SIN A))
                HI (SQRT (- (* (* R R) I.00000001) (EXPT L 2)))
                B (ATAN (/LHI))
                H2 (- R H I)
                LI (* R (- I (COS A)))
                YI (/ LI (COS (* (/ PI 180) AG)))
                Y2 (* H2 (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180) AG))))
                Y (- YI Y2)
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) B) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```





GRAPHIC CONSTRUCTION AND FORMULAS



$$L = R \times sinA$$

$$H1 = \sqrt{R^2 - L^2}$$

$$X = R \times B$$

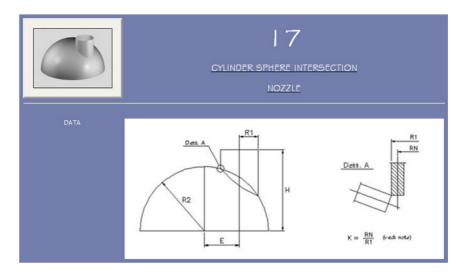
$$|L1 = R - (R \times cosA)$$

$$H2 = R - H1$$

$$Y2 = H2 \times tanAG$$

$$Y1 = L1/cosAG$$

 $Y = Y1 - Y2$

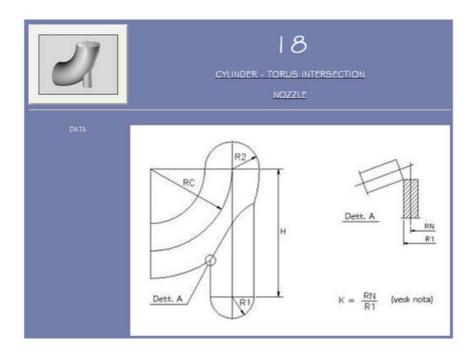


PROGRAM: CILSF.lsp

)

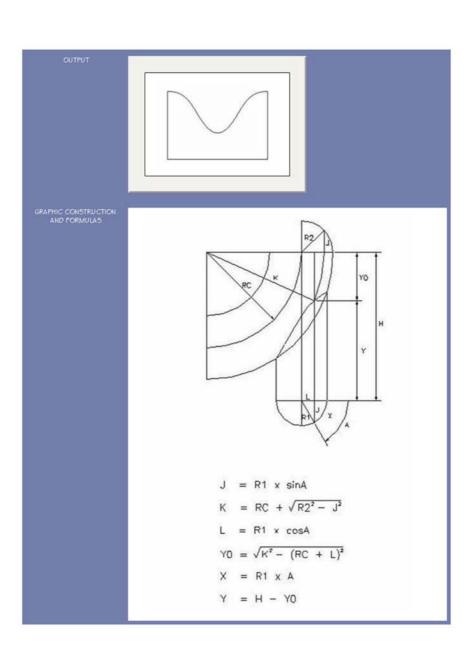
```
(DEFUN C:CILSF ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        E (GETREAL "\nIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ HO (- H (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT (+ E R1) 2)))))
      (SETQ PI (LIST O HO))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ J (* R I (SIN A))
                L (* RI (COS A))
                K (SQRT (+ (EXPT (+ E L) 2) (EXPT J 2)))
                YO (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT K 2)))
                Y (- H YO)
                KI (/RNRI)
                X (* (* KI RI) A) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) O))
            (SETQ P4 (LIST O O))
            (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
```

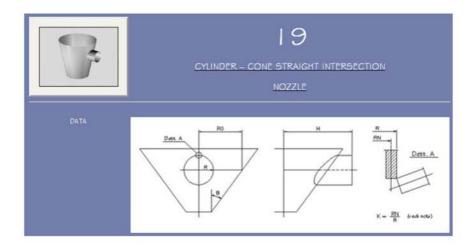
YO $| X = R1 \times A$ $J = R1 \times sinA$ $L = R1 \times cosA$ $K = \sqrt{(E + L)^2 + J^2}$ $YO = \sqrt{R2^2 - K^2}$ Y = H - YO



PROGRAM: CILTO.Isp

```
(DEFUN C:CILTO ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RC (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RC: ")
        RI (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RI: ")
        RN (GETREAL "VIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        R2 (GETREAL "MIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        H (GETREAL "IMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ HO (- H (SQRT (- (* (+ RC R2) (+ RC R2)) (EXPT (+ RC R1) 2)))))
      (SETQ PI (LIST O HO))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ J (* RI (SIN A))
               L (* RI (COS A))
                K (+ RC (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT J 2))))
               YO (SQRT (- (* K K) (EXPT (+ RC L) 2)))
               Y (- H YO)
               K (/ RN RI)
               X (* (* K R I ) A) P2 (UST X Y)
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) O))
            (SETQ P4 (LIST O O))
            (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

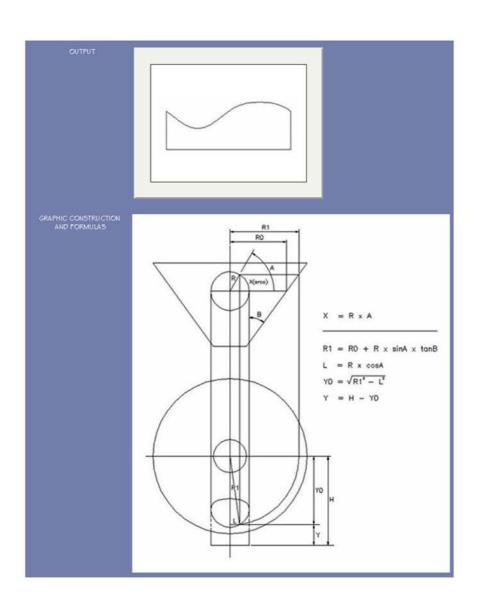


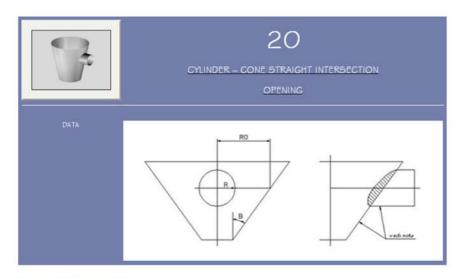


PROGRAM: CILCO.Isp

)

```
(DEFUN C:CILCO ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RO (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RO: ")
        RN (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        B (GETREAL "INIMMETTERE ANGOLO B: ")
        H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ HO (- H (SQRT (- (* RO RO) (EXPT R 2)))))
      (SETQ PI (LIST O HO))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B)))))
                L (* R (COS A))
                YO (SQRT (- (* R I R I) (EXPT L 2)))
                Y (- H YO)
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
             (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) O))
            (SETQ P4 (LIST O O))
             (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
             (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
```

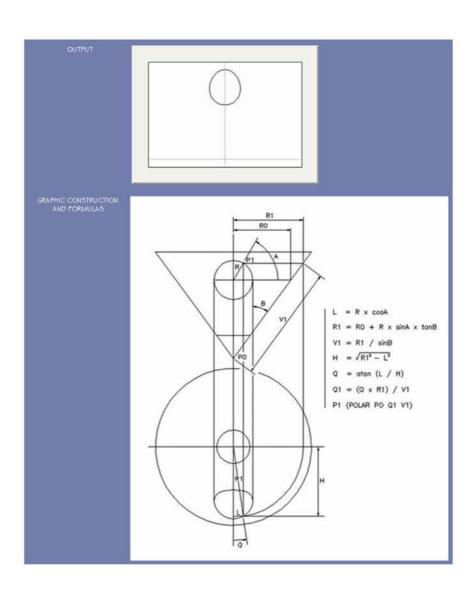


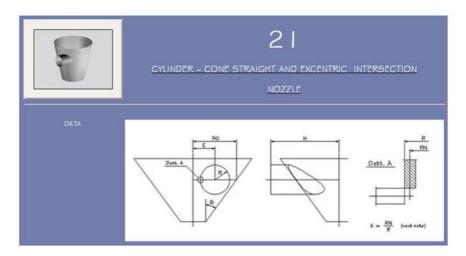


PROGRAM: CICON.Isp

)

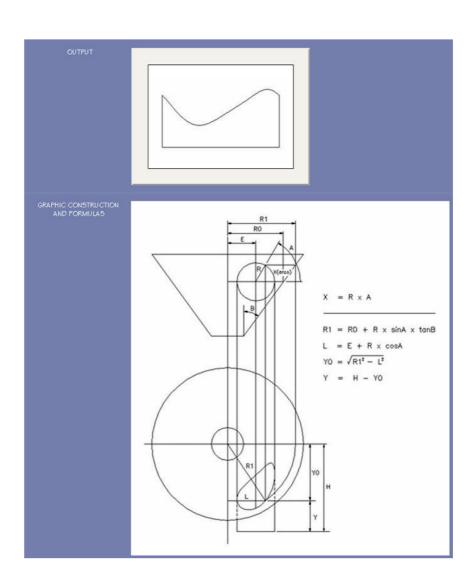
```
(DEFUN C:CICON ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RO (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RO: ")
        B (GETREAL "InIMMETTERE ANGOLO B: ")
        PI (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PO (LIST O O))
      (SETQ A O)
      (SETQ L (* R (COS A)))
      (SETQ RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B))))))
      (SETQ VI (/ RI (SIN (* (/ PI 180) B))))
      (SETQ H (SQRT (- (* R1 R1) (EXPT L 2))))
      (SETQ Q (ATAN (/ L H)))
      (SETQ Q1 (/ (* Q R1) V1))
      (SETQ PI (POLAR PO QI VI))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* R (COS A))
               RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B)))))
               VI (/RI (SIN (* (/PI 180) B)))
               H (SQRT (- (* R I R I) (EXPT L 2)))
               Q (ATAN (/ L H))
               Q1 (/(* Q R1) V1)
               P2 (POLAR PO QI VI)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (COMMAND "ROTATE" "ALL" " PO 90 ")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
                                             113
```

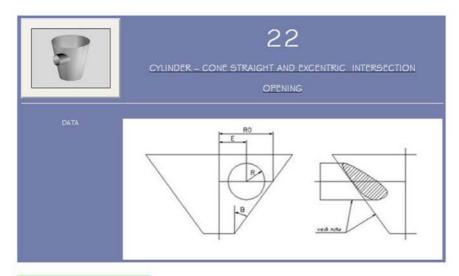




PROGRAM: CILCOE.Isp

```
(DEFUN C:CILCOE ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RO (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RO: ")
        RN (GETREAL "IMMETTERE RAGGIO RN: ")
        B (GETREAL "InIMMETTERE ANGOLO B: ")
        E (GETREAL "InIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
        H (GETREAL "InIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        PI (GETPOINT "InPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ HO (- H (SQRT (- (* RO RO) (EXPT (+ E R) 2)))))
      (SETQ PI (LIST O HO))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B)))))
                L (+ E (* R (COS A)))
                YO (SQRT (- (* RI RI) (EXPT L 2)))
                Y (- H YO)
                K (/ RN R)
                X (* (* K R) A) P2 (LIST X Y)
          )
             (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) O))
            (SETQ P4 (LIST O O))
            (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
             (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

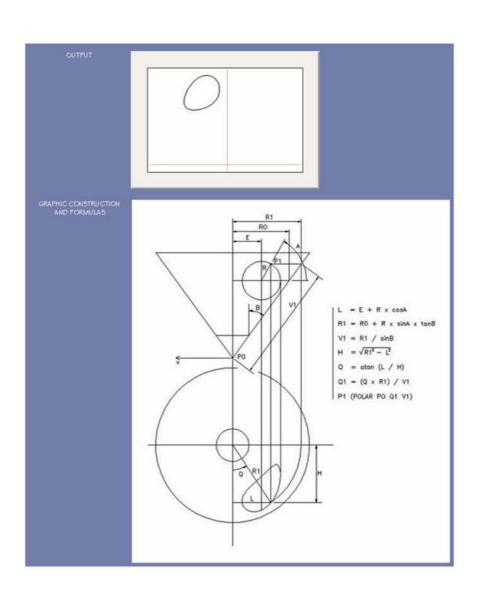


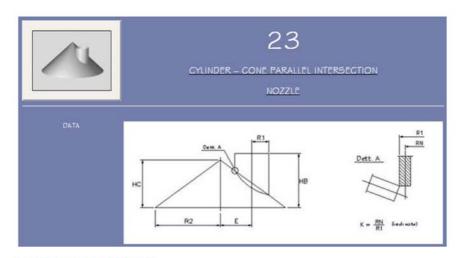


PROGRAM: CICONE.lsp

)

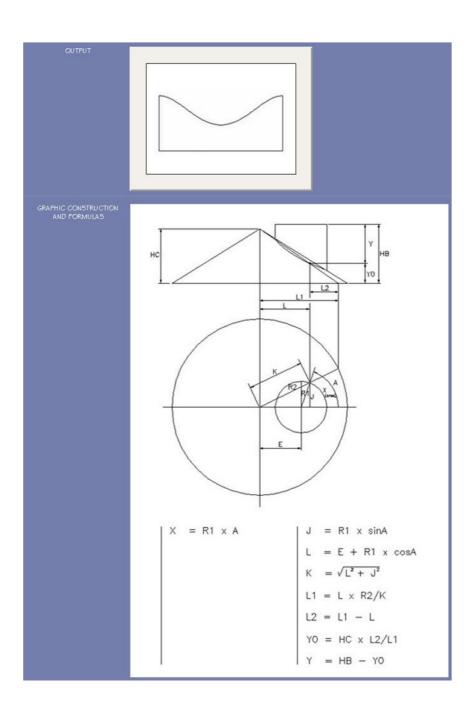
```
(DEFUN C:CICONE ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RO (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO RO: ")
        B (GETREAL "IMMETTERE ANGOLO B: ")
        E (GETREAL "IMMETTERE ECCENTRICITA" E: ")
        PI (GETPOINT "InPUNTO INIZIALE: ")
    )
      (SETQ PO (LIST O O))
      (SETQ A O)
      (SETQ L (+ E (* R (COS A))))
      (SETQ RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B))))))
      (SETQ VI (/ RI (SIN (* (/ PI 180) B))))
      (SETQ H (SQRT (- (* R1 R1) (EXPT L 2))))
      (SETQ Q (ATAN (/ L H)))
      (SETQ Q1 (/ (* Q R1) V1))
      (SETQ PI (POLAR PO QI VI))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (+ E (* R (COS A)))
               RI (+ RO (* (* R (SIN A)) (/ (SIN (* (/ PI 180) B)) (COS (* (/ PI 180) B)))))
               VI (/ RI (SIN (* (/ PI 180) B)))
               H (SQRT (- (* RI RI) (EXPT L 2)))
               Q (ATAN (/ L H))
               Q1 (/(* Q R1) V1)
               P2 (POLAR PO QI VI)
             (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (COMMAND "ROTATE" "ALL" " PO 90 "")
             (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
             (PRINC)
                                             117
```

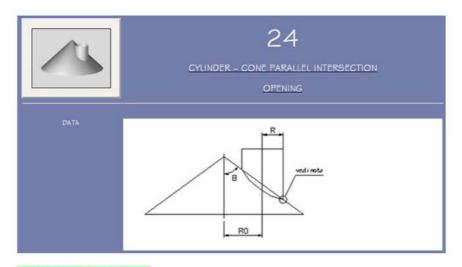




PROGRAM: CILCOP.Isp

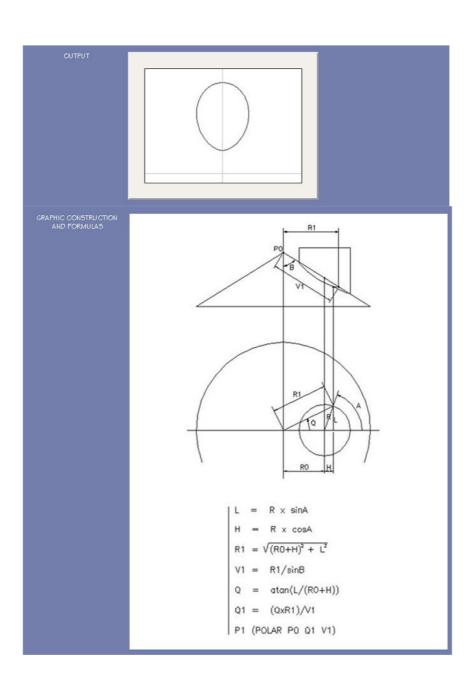
```
(DEFUN C:CILCOP ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ RI (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO RI: ")
        RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
        R2 (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO R2: ")
        E (GETREAL "IMMETTERE ECCENTRICITA" E: ")
        HC (GETREAL "INIMMETTERE ALTEZZA HC: ")
        HB (GETREAL "INIMMETTERE ALTEZZA HB: ")
        PI (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ LO (- R2 (+ E R1)))
      (SETQ H (/ (* HC LO) R2))
      (SETQ HO (- HB H))
      (SETQ PI (LIST O HO))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ J (* RI (SIN A))
                L (+ E (* RI (COS A)))
                K (SQRT (+ (EXPT L 2) (EXPT J 2)))
                LI ( (* L R2) K)
                L2 (- L1 L)
                YO (/ (* HC L2) L1)
                Y (- HB YO)
                KI (/RNRI)
                X (* (* KI RI) A) P2 (LIST X Y)
          )
            (COMMAND "LINE" PI P2 ")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
        )
            (SETQ P3 (LIST (CAR P2) O))
            (SETQ P4 (LIST O O))
            (SETQ P5 (LIST O (CADR P2)))
            (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```

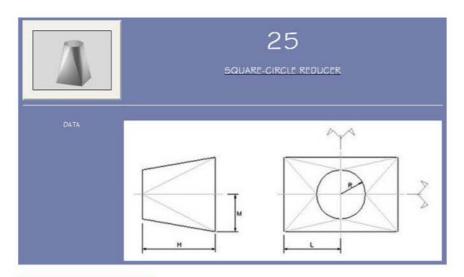




PROGRAM: CICONX.lsp

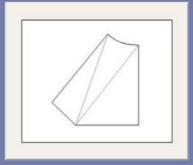
```
(DEFUN C:CICONX ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "INIMMETTERE RAGGIO R: ")
        RO (GETREAL "InIMMETTERE RAGGIO RO: ")
        B (GETREAL "INIMMETTERE ANGOLO B: ")
        PI (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
   )
      (SETQ PO (LIST O O))
      (SETQ A O)
      (SETQ L (* R (SIN A)))
      (SETQ H (* R (COS A)))
      (SETQ RI (SQRT (+ (* L L) (EXPT (+ RO H) 2))))
      (SETQ VI (/ RI (SIN (* (/ PI 180) B))))
      (SETQ Q (ATAN (/ L (+ RO H))))
      (SETQ Q1 (/ (* Q R1) V1))
      (SETQ PI (POLAR PO QI VI))
      (SETQ A (/ PI 90))
        (REPEAT 180
          (SETQ L (* R (SIN A))
              H (* R (COS A))
              RI (SQRT (+ (* L L) (EXPT (+ RO H) 2)))
              VI (/RI (SIN (* (/PI 180) B)))
              Q (ATAN (/ L (+ RO H)))
              Q1 (/(* Q R1) V1)
              P2 (POLAR PO QI VI)
            (COMMAND "LINE" PI P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            (COMMAND "ROTATE" "ALL" "" PO 90 "")
            (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
            (PRINC)
)
```



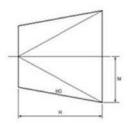


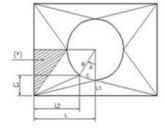
PROGRAM: RACQTS.lsp

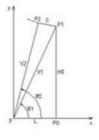
```
(DEFUN C:RACQTS ()
  (GRAPHSCR)
    (SETQ R (GETREAL "VIMMETTERE RAGGIO R: ")
        L (GETREAL "VIMMETTERE SEMILATO L: ")
        M (GETREAL "INIMMETTERE SEMILATO M: ")
        H (GETREAL "InIMMETTERE ALTEZZA H: ")
        P (GETPOINT "INPUNTO INIZIALE: ")
      (SETQ P (LIST O O))
      (SETQ PO (LIST L O))
      (SETQ LI (- M R))
      (SETQ HO (SQRT (+ (* H H) (EXPT L1 2))))
      (SETQ PI (LIST L HO))
      (COMMAND "LINE" P PO "")
      (COMMAND "LINE" PO PI "")
      (SETQ BI (ATAN (/ HO L)))
      (SETQ VI (SQRT (+ (* L L) (EXPT HO 2))))
      (SETQ A (/ PI 180))
      (SETQ C (* R A))
        (REPEAT 90
          (SETQ L2 (- L (* R (SIN A)))
              L3 (- M (* R (COS A)))
              V2 (SQRT (+ (+ (* L2 L2) (EXPT L3 2)) (EXPT H 2)))
              P (/ (+ (+ C VI) V2) 2)
              DI (-PC)
              D2 (- PVI)
              D3 (- P V2)
              5 (SQRT (/ (* D1 (* D2 D3)) P))
              T(SDI)
              B2 (+ (* (ATAN T) 2) B1)
              P2 (POLAR (LIST O O) B2 V2)
            (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
            (SETQ PI P2)
            (SETQ VI V2)
            (SETQ BI B2)
            (SETQ A (+ A (/ PI 180)))
            (SETQ HI (SQRT (+ (* L2 L2) (EXPT H 2)))
                B2 (+ (ATAN (/ H1 M)) B1)
                P2 (POLAR (LIST 0 0) B2 M)
                (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
```



GRAPHIC CONSTRUCTION AND FORMULAS







$$L1 = M - R$$

$$H0 = \sqrt{H^2 + L1^2}$$

$$B1 = atan H0/L$$

$$V1 = \sqrt{L^2 + H0^2}$$

$$L2 = L - R \times sinA$$

$$L3 = M - R \times cosA$$

$$V2 = \sqrt{L2^2 + L3^2 + H^2}$$

$$P = (C+V1+V2)/2$$

$$S = \sqrt{(P-C)x(P-V1)x(P-V2)/P}$$

$$T = S/(P-C)$$

$$B2 = 2 \times atanT + B1$$

(*) Triangolo rettangolo finale dello sviluppo, avente cateti M ed $H1 = \sqrt{H^1 + L2^2}$

La ragazza sul lago Rotondo

Vi propongo ora un bel problema di logica formale, apparso sulla rivista "Scientific American" tanti anni fa. Si tratta di un problema di non facile soluzione, da affrontare usando la logica e la matematica di tipo liceale.

Una ragazza molto carina è in vacanza sul lago Rotondo, così chiamato perché ha una forma perfettamente circolare con raggio *r*.

Una mattina la ragazza, mentre passeggia lungo la sponda del lago, viene avvicinata da un bruto che cerca di violentarla. La ragazza riesce a divincolarsi e si mette a correre lungo la sponda del lago, inseguita dal bruto. Fuggendo, vede una barchetta sulla riva, per cui vi entra dentro e voga verso il centro del lago per portarsi in salvo. Il bruto corre con una velocità esattamente 4 volte superiore alla velocità con la quale lei voga.

Premesso che:

- il bruto non sa nuotare e non può fare altro che correre in tondo;
- la ragazza è sempre a conoscenza delle proprie coordinate di posizione; ci si pone la domanda; come fa la ragazza a salvarsi?

Soluzione

Indichiamo con A e B le posizioni della ragazza e del bruto, rispettivamente. Esaminiamo la situazione ipotetica in cui la ragazza e il bruto si incontrano sulla sponda del lago, in un punto X, nello stesso istante. Perché ciò avvenga, la ragazza A dovrebbe trovarsi, ad un certo punto della sua fuga, in una posizione

$$d = (\pi/4) \cdot r$$

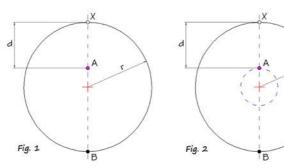
La ragazza si salverà se:

$$(3/4) \cdot r < d < (\pi/4) \cdot r \tag{1}$$

opposta a *B* (figura 1) e distante dalla riva di un tratto:

Ma come può la ragazza, partendo dal centro del lago, raggiungere la posizione della figura 1?

Esaminiamo la figura 2, in cui è mostrato un percorso circolare concentrico passante per la posizione A della figura 1. Se la ragazza, partendo da centro, si porta su un qualsiasi punto di questo percorso, può percorrerlo in modo da trovarsi, ad un certo punto, nella posizione di salvezza della figura 1. Infatti, come si può facilmente vedere, su questo percorso circolare la velocità angolare della ragazza risulta essere leggermente superiore a quella del bruto. Per cui, raggiunta l'opposizione con B, la ragazza potrà tagliare lungo il raggio e salvarsi.



La relazione (1) descrive una sottile corona circolare, al cui interno tutti i percorsi circolari concentrici sono validi. Sono da escludere gli estremi dell'intervallo (segni =) che danno:

- il più piccolo: una velocità angolare uguale a quella del bruto, e quindi l'impossibilità di realizzare la posizione di opposizione che porta alla salvezza;
- il più grande: la corsa finale verso un appuntamento fatale.

L'ultimo teorema di Fermat: una sfida ancora aperta

La storia di questo teorema è arcinota, tuttavia la riepiloghiamo qui brevemente.

Si racconta che il matematico francese del XVII secolo, Pierre de Fermat, alle prese con la lettura di una edizione dell'*Arithmetica* di Diofanto, abbia un giorno annotato ai margini della stessa, come era solito fare con le sue teorie, la frase seguente:

« È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina »

Ciò facendo, forse senza rendersene conto, aveva posto una domanda alla quale gli antichi matematici greci non avevano pensato, formulando, in una maniera che stupisce per la sua semplicità, il problema più difficile che sia mai esistito.

Nei secoli successivi molti grandi matematici cercarono la dimostrazione "perduta" di questo teorema. Eulero dimostrò l'impossibilità di soluzioni intere per n=3. Altri matematici, come Legendre e Lejeune-Dirichlet, dimostrarono autonomamente il caso n=5. Ma nessuno di essi giunse mai ad una conclusione, cioè ad una dimostrazione matematica rigorosa della congettura di Fermat valida per qualsiasi n.

Finalmente nel 1994, Andrew Wiles, dell'università di Princeton, con l'aiuto di Richard Taylor, diede una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, pubblicata nel 1995 sulla rivista Annals of Mathematics.

Anni prima due matematici giapponesi, Yutaka e Shimura, avevano congetturato (senza dimostrarla) una profonda interconnessione fra le "Curve Ellittiche" e le "Forme Modulari", due campi della matematica completamente diversi. Tale congettura afferma che ogni curva ellittica è modulare, potendo essere associata con un'unica forma modulare. In seguito, altri ricercatori provarono che, se la congettura di Fermat non fosse vera, esisterebbe una soluzione (a,b,c) per n > 2, con cui sarebbe possibile creare una curva ellittica non modulare, contro la congettura di Yutaka e Shimura. Per risolvere l'ultimo teorema di Fermat, bastava quindi dimostrare la congettura di Yutaka e Shimura. Per fare ciò Wiles ha impiegato ben sette anni, la maggior parte dei quali in completo isolamento, compiendo uno sforzo titanico per far convergere tutte le più recenti tecniche della teoria dei numeri verso la sua dimostrazione del teorema di Fermat.

Quindi, oltre al lavoro di altri ricercatori in campi diversi della matematica del XX secolo, Wiles utilizza tecniche e strumenti che erano sconosciuti ai tempi di Fermat. Il risultato finale è un lavoro imponente (oltre 300 pagine) scritto in termini molto difficili, anche per la maggior parte dei matematici di oggi.

Al contrario, ammesso che esista e che sia valida, la dimostrazione di Fermat

dovrebbe risultare molto più sintetica ed elementare, degna della bellezza del suo enunciato (meravigliosa), scritta nei termini usati dai matematici del XVII secolo. Perciò, secondo questa ipotesi, la ricerca della dimostrazione perduta sarebbe da considerarsi una sfida ancora aperta.

Tuttavia, molti matematici sono più propensi a credere che Fermat si sia riferito, nella sua nota ai margini del testo di Diofanto, all'esistenza di una sua dimostrazione, dapprima ritenuta corretta, ma poi abbandonata o messa da parte in seguito a ripensamenti, come è accaduto a molti matematici successivi che si sono cimentati con lo stesso problema. Una prova di ciò sarebbe l'esistenza di un lavoro parziale sull'impossibilità di soluzioni intere per n=4, pubblicato da Fermat in epoca successiva, che dimostrerebbe che la ricerca per lui non era ancora conclusa.

Recentemente, nuove dimostrazioni del teorema di Fermat sono state proposte all'attenzione della comunità scientifica internazionale, segno che la sfida rimane ancora aperta e che molti matematici continuano la ricerca della prova più semplice che Fermat poteva avere in mente.

La leggenda di Sissa Nassir

(Traduzione dal Liber Abbaci)

Sulla duplicazione delle case di una scacchiera ed alcuni altri metodi.

Proponiamo di duplicare le caselle di una scacchiera, utilizzando un metodo duplice: una scacchiera con una sequenza di caselle in cui ciascun numero è il doppio del suo antecedente e un'altra con una sequenza di caselle con numeri che sono ciascuno la somma di tutti i numeri precedenti. Mostriamo ora come si può eseguire la duplicazione. Per prima cosa si eseguono i raddoppi, posto dopo posto, raddoppiando il posto precedente, fino alla fine; l'altro modo si esegue raddoppiando la quantità del primo posto, si ha due, il due si moltiplica per sé; si ha 4, che supera di 1 il totale dei due primi posti. Per esempio, nel primo posto si mette 1, nel secondo 2, che aggiunto al primo fa 3; questo tre più 1 dà il 4 scritto sopra; si moltiplica il 4 per sé, dà 16, che supera di 1 la somma del doppio dei primi 2 posti, cioè 4 posti. Per esempio, nel primo c'è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, che sommati insieme fanno 15, che è di 1 inferiore a 16. Inoltre moltiplicando il 16 per sé, si ha 256 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due nel doppio dei 4 posti sopra scritti, cioè gli 8 posti che formano la prima fila della scacchiera. Per esempio, nel primo è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, nel quinto 16, nel sesto 32, nel settimo 64, nell'ottavo 128, che sommati insieme fanno 255, cioè 256 meno 1, come abbiamo detto prima; quindi, 256 moltiplicato per se stesso fa 65536, che è di 1 più grande della somma delle potenze nel doppio della prima fila, vale a dire nei primi 16 posti; quindi, per lo stesso motivo, si moltiplica il 65536 per se stesso, ottenendo 4294967296, che similmente è di 1 più grande della somma delle potenze di due sul doppio di due file, ossia su 32 posti, che costituiscono la metà della scacchiera. Infine, moltiplicando il 4294967296 per sé, si ottiene 18446744073709551616 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due sull'intera scacchiera; questo numero, moltiplicato per sé, eccede di 1 la somma delle potenze di due su due scacchiere, cioè 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, e quindi, moltiplicando, possiamo procedere senza fine. Ma quando il numero dei raddoppi diventa una moltitudine, non si è più in grado di seguire la procedura; cercheremo di spiegare ciò città 65536 case 65536 scrigni 65536 bisanti 65536

più chiaramente. Dalla somma di due file di scacchiera, vale a dire da 16 posti, otteniamo 65536, e con questi riempiamo uno scrigno; allora, raddoppiamo questo scrigno, e quindi avremo due scrigni da inserire nel diciassettesimo posto, che è il primo della terza fila: nel secondo posto della stessa fila avremo 4 scrigni, nel terzo 8, nel quarto 16, nel quinto 32, nel sesto 64, nel settimo 128, e nell'ultimo posto della stessa fila 256 scrigni. Nel primo posto della quarta riga avremo 512 scrigni, nel secondo 1024, nel terzo 2048, nel quarto 4096, nel quinto 8192, nel sesto 16384, nel settimo 32768, e nell'ultimo posto avremo 65536 scrigni; con questi scrigni riempiamo una casa, allora avremo nel primo posto della quinta fila 2 case, nel secondo 4, nel terzo 8, e quindi, raddoppiando in tal modo, avremo nell'ultimo posto in sesta fila 65536 case. Con queste case facciamo una città, e continuiamo con il raddoppio nei restanti posti; allora avremo nell'ultima posizione della scacchiera 65536 città; quindi la somma di tutti i numeri sulla scacchiera ammonta a 65536 città; ogni città ha 65536 case, in ogni casa ci sono 65536 scrigni, e in ogni scrigno ci sono 65536 bisanti. Per effetto della dimostrazione suddetta si deve avere in ogni scrigno 1 bisante in meno.

Problemi sulla scacchiera

1 - La leggenda di Sissa

Si tratta di una leggenda indiana sulla nascita degli scacchi, secondo cui un principe indiano, volendo ricompensare il suo bramino Sissa per l'invenzione del gioco degli scacchi, si vide avanzare una richiesta apparentemente modesta. Avrebbe dovuto pagare un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando, fino a ricoprire l'intera scacchiera.

Il principe promise il premio, ma poi si rese conto di non avere abbastanza grano per mantenere l'impegno preso. Sicuramente Sissa non ebbe quello che chiedeva, in quanto la sopradetta somma risulta essere un numero molto alto:

18446744073709551615 (circa 1000 miliardi di tonnellate di grano)

Per calcolare questo numero Leonardo Fibonacci (Liber Abaci-1202) calcola il risultato della prima riga (8 caselle) che è 255, minore di una unità del numero successivo $256 = 2^8$, il primo della seconda riga. Poi, raddoppiando tre volte il numero delle caselle da conteggiare, fa notare che:

28		
2 ¹⁶ 2 ³²		\sum_{1}^{32} = 2^{32} -
		$\frac{64}{1} = 2^{64}$
2 ⁶⁴		\sum_{1} = 2°-

$$(2^8)^2 = 2^{16} = 65536$$

supera di 1 la somma delle prime 16 caselle

$$(2^{16})^2 = 2^{32} = 4294967296$$

supera di 1 la somma delle prime 32 caselle

$$(2^{32})^2 = 2^{64} = 18446744073709551616$$

supera di 1 la somma di tutte le 64 caselle

Quindi, il numero dei chicchi di grano, che indichiamo con S, è:

$$S = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

Lo stesso risultato si ottiene dalla progressione geometrica di ragione q:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$S_n \cdot q = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$S_n \cdot q - S_n = q^n - 1$$

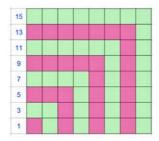
Nel nostro caso q=2, quindi:

$$S_n \cdot 2 - S_n = 2^n - 1$$

 $S_{64} = 2^{64} - 1$

2 - Somma dei primi "n" numeri dispari

Secondo me, il modo più immediato per trovare la formula che calcola la somma dei primi n numeri dispari è quello che utilizza una scacchiera, o una qualsiasi griglia quadrata, nel modo seguente:



Prendendo come unità una casella della scacchiera ed evidenziando la sequenza dei numeri dispari come in figura, si vede subito che:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^{2}$$

e si può scrivere, per induzione:

$$\sum_{i=1}^{n} (2n-1) = n^2$$

3 - Quanti quadrati si vedono in una scacchiera?

I quadrati di lato unitario sono $8^2 = 64$.

I quadrati di lato maggiore di 1 si contano ordinatamente spostandosi sulle righe (o colonne) di una colonna (o riga alla volta). Si ottengono:

quadrati di lato 2

6² quadrati di lato 3 5² quadrati di lato 4 4² quadrati di lato 5 3² quadrati di lato 6

quadrati di lato 7

quadrato di lato 8

Perciò il numero totale dei quadrati visibili è dato dalla somma dei quadrati dei primi 8 numeri naturali:

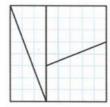
$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$$

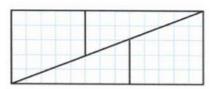
In generale, in una scacchiera n x n i quadrati visibili sono dati dal numero piramidale quadrato (ancora lui!):

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

4 - L'enigma della scacchiera spezzata

Dividiamo una scacchiera 8 x 8 in quattro parti, come mostra la prima figura, e ricomponiamola come nella seconda figura.





Le figure sono composte, l'una e l'altra, da due triangoli rettangoli di base 8 e altezza 3 e due trapezi rettangoli di altezza 5 e basi parallele lunghe 5 e 3. Ma il quadrato a sinistra contiene 64 quadratini, mentre il rettangolo ne contiene 13 x 5 = 65. C'è un quadratino in più, come mai?

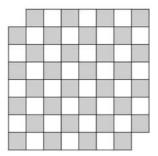
L'enigma si scioglie facilmente. Basta confrontare, nella figura rettangolare, le inclinazioni dell'ipotenusa di un triangolo e del lato obliquo del trapezio adiacente. Infatti, l'ipotenusa ha una pendenza pari a 3/8 = 0,375, mentre il lato obliquo ha pendenza 2/5 = 0,4. Essendo diversamente inclinati i due segmenti non possono appartenere, così come *sembra*, alla diagonale del rettangolo che è una linea retta. Sono queste differenze impercettibili fra la figura reale e quella apparente che formano la differenza, cioè il quadratino in più.

C'è un altro modo per sciogliere l'enigma. La differenza esatta di un quadrato si trova calcolando le aree dei triangoli con il teorema di Pick (il *punto-griglia* sull'ipotenusa compare solo nella seconda figura).

5 - La scacchiera mutilata

Ad una scacchiera sono state tolte le due caselle d'angolo, come in figura. Si prendano *31* tessere rettangolari tali che ogni tessera ricopra esattamente due caselle.

Domanda: è possibile disporre le *31* tessere in modo da ricoprire con esse tutta la scacchiera?



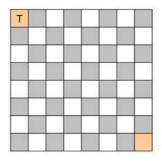
Il problema si risolve col ragionamento seguente:

- La scacchiera è formata da 30 caselle bianche e 32 nere.
- Due caselle adiacenti hanno sempre colori diversi.
- Allora, comunque vengano disposte, le prime 30 tessere ricoprirono 30 caselle bianche e 30 nere.
- Le due caselle rimanenti saranno sempre di colore nero, perciò non possono essere entrambe coperte dalla tessera restante.

Perciò, qualsiasi combinazione di tessere non riuscirà a coprire la scacchiera mutilata.

6 - A passo di torre

E' possibile raggiungere con una torre, partendo dalla casella in alto a sinistra, la casella in basso a destra, transitando una sola volta su tutte le *64* caselle della scacchiera?



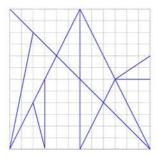
Il problema si risolve col ragionamento seguente:

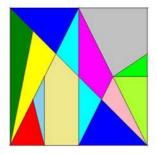
- Ad ogni avanzamento elementare (di una casella), qualunque sia il percorso, cambia il colore della casella, da bianco B a nero N o viceversa.
- Numeriamo la sequenza degli spostamenti, su qualsiasi percorso, con i numeri da 1 a 64.
- Mettendo in corrispondenza la numerazione con la sequenza B,N,B,N,B,N....., si vede che, ad ogni numero pari corrisponde il colore nero N. Perciò, lo spostamento finale non potrà mai portare la torre sul bianco.

Perciò, qualunque sia il percorso seguito, la torre non raggiungerà mai il suo obiettivo.

Lo Stomachion

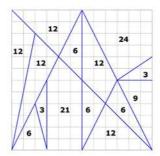
Su una scacchiera 12 x 12 tracciamo delle linee dividendo la scacchiera in 14 pezzi, come nella figura seguente:





Abbiamo così ottenuto le *14* tessere dello Stomachion (vedi copertina), un gioco antichissimo di cui sembra si sia occupato lo stesso Archimede, studiandone le proprietà geometriche e matematiche.

Il calcolo dell'area di ogni singolo pezzo dello Stomachion si esegue elementarmente, senza scomodare il teorema di Pick, ottenendo i seguenti valori.



Risulta quindi che i 14 pezzi sono tutti commensurabili con l'area del quadrato, nei seguenti rapporti:

2 pezzi di area 3 1/48 4 pezzi di area 6 1/24 1 pezzo di area 9 1/16 5 pezzi di area 12 1/12 1 pezzo di area 21 7/48 1 pezzo di area 24 1/6

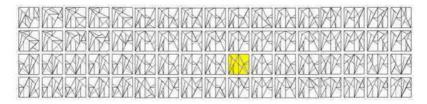
e che l'area di ciascun pezzo è multipla dell'area del pezzo più piccolo (1/48).

Questa proprietà dei pezzi permette di costruire, usando tutti i pezzi o una parte di essi, varie figure geometriche le cui aree stiano fra loro in determinati rapporti. Un'altra caratteristica delle varie forme poligonali del gioco è la presenza in esse di diverse coppie di lati uguali e di relazioni particolari fra i vari angoli, per cui esistono svariate possibilità di assemblaggio dei pezzi nella forma di un quadrato (1). Lo Stomachion propone quindi un problema di geometria computazionale, risolto solo di recente.

Un gruppo di ricercatori della Stanford University ha calcolato che i numero totale delle configurazioni ottenibili nel quadrato 12 x 12, cioè tutte le possibili soluzioni del puzzle, è 17152.

Secondo Bill Cutler della Cornell University, queste sono riducibili a *536* soluzioni distinte, se si considerano equivalenti tutte le configurazioni ottenibili l'una dall'altra per rotazione o per riflessione (2).

Mostriamo qui di seguito alcune delle 536 configurazioni distinte trovate da Cutler:



Se liberiamo il gioco dall'obbligo di assemblare le tessere separate nella forma del quadrato iniziale, allora il numero delle figure ottenibili, impiegando tutte o parte delle tessere, diventa elevatissimo, tanto da rendere significativa la possibilità di realizzare figure dalla fisionomia nota, che è l'obiettivo principale per cui il gioco viene utilizzato.

Nelle figure che seguono mostriamo l'Elefante di Ausonio ed altre figure interessanti che si possono costruire con lo Stomachion:





Note

- 1 Osservando le configurazioni di Cutler si possono vedere i vari modi in cui è possibile assemblare più pezzi, aventi lati la cui somma dia il lato del quadrato, da disporre quindi su un lato, oppure pezzi con angoli che sommati diano un angolo retto, da piazzare sui vertici, ed altre possibilità.
- **2** Non ci vuole molto a calcolare, partendo dal numero *17152* di soluzioni possibili, il numero *536* di soluzioni distinte. Infatti, combinando i numeri seguenti:
- 4 rotazioni intorno al centro del quadrato
- 2 riflessioni rispetto ai lati
- 2 riflessioni rispetto agli assi
- 2 riflessioni rispetto alle diagonali

Otteniamo: $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Per cui: 17152/32 = 536

SULLE AREE ED I PERIMETRI DEI POLIGONI REGOLARI

Sempre sul tema guida di questo libro, illustrato nell'introduzione, un'altra interessante "riscoperta" l'ho fatta mentre indagavo su un argomento storico della matematica: quello della scoperta fatta dal matematico indiano $Madhava\ di\ Sangamagrama\ nel 1400,\ e\ poi\ da\ Gregory\ e\ Leibniz\ nel 1600,\ secondo\ cui\ il\ valore\ di\ <math display="inline">\pi$ si ottiene dalla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Alla consueta ricerca di un modello geometrico che potesse spiegare la serie, ho "calcolato" agevolmente con Autocad (**) i valori delle aree dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio unitario, ottenuti partendo dal triangolo equilatero, raddoppiando successivamente il numero dei lati. Come è noto, il valore di π corrisponde all'area del poligono con infiniti lati (cerchio). Ho poi calcolato i semi-perimetri delle stesse figure disegnate, poichè anche la sequenza di questi valori conduce a π . I risultati ottenuti sono elencati nella tabella seguente:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
3	1,299038	2,598076
6	2,598076	3,000000
12	3,000000	3,105829
24	3,105829	3,132629
48	3,132629	3,139350
96	3,139350	3,141032

La "riscoperta" di cui accennavo all'inizio, sta nel fatto che le due sequenze di valori *coincidono perfettamente*, a meno della scalatura. C'era da aspettarselo, in quanto le due sequenze sono stare costruite sullo stesso modello geometrico e conducono allo stesso risultato, anche se singolarmente esprimono quantità diverse. Bisognerà tuttavia darne una dimostrazione.

Lo stesso risultato di sopra si ottiene partendo dal quadrato e dal pentagono:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
4	2,000000	2,828427
8	2,828427	3,061467
16	3,061467	3,121445
32	3,121445	3,136548
64	3,136548	3,140331
128	3,140331	3,141277

^(**) Disegnata una "regione" piana, la sua area ed il suo perimetro si ottengono con i comandi "Inquiry" e "Region/Mass

N. Lati	Area	Semi-perimetro
5	2,377641	2,938926
10	2,938926	3,090170
20	3,090170	3,128689
40	3,128689	3,138364
80	3,138364	3,140785
160	3,140785	3,141391

per cui sembra possibile una estensione, comprendendovi poligoni regolari di un qualsiasi numero di lati. Generalizzando poi a circonferenze di raggio *R* qualsiasi, questi risultati consentirebbero di affermare quanto segue:

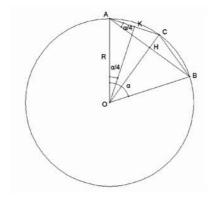
Il valore numerico del semi-perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio R, è uguale al valore numerico dell'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

Questa affermazione ha, per ora, il valore di una semplice constatazione, senza alcun valore, in quanto mette a confronto quantità eterogenee, quali lunghezze ed aree. Le forniremo allora un significato geometrico, elevandola al rango di teorema, formulandola invece nel seguente modo:

L'area del rettangolo avente per base il semi-perimetro di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio R, e per altezza lo stesso raggio R, è uquale all'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

Dimostrazione

Consideriamo, in un cerchio di raggio R, uno spicchio generico di ampiezza α , dove α è l'ennesima parte di 2π , e costruiamo in esso un ennesimo dei poligoni di n e 2n lati in esame.

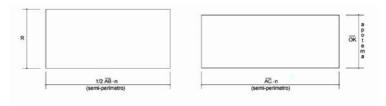


Nella figura sono evidenti le seguenti relazioni:

$$\overline{OK} = \overline{OA}\cos\frac{\alpha}{4} = R\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\cos \frac{\alpha}{A}}$$

Dobbiamo dimostrare l'equivalenza dei rettangoli:



cioè che:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot n \cdot R = \overline{AC} \cdot n \cdot \overline{OK}$$

eliminando n si ha:

$$\overline{AH} \cdot R = \overline{AC} \cdot \overline{OK}$$

e sostituendo:

$$\overline{AC} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot R = \overline{AC} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot R$$

che è l'identità che dimostra il teorema.

Osservazion i

Esaminando ancora una volta i due rettangoli a confronto della figura precedente, si può notare che, mentre la base del secondo rettangolo si "allunga", rispetto alla prima, di un fattore $1/\cos(\alpha/4)$, l'altezza dello stesso si "accorcia" di un fattore $\cos(\alpha/4)$. Così, il loro prodotto resta invariato, e procedendo con il raddoppio del numero dei lati dei poligoni, si generano le coppie di figure equivalenti osservate.

Inoltre, sfruttando il fattore variabile $1/\cos(\alpha/4)$ visto sopra, sembra agevole, partendo dal valore 3 del semi-perimetro dell'esagono regolare, costruire una sequenza infinita di valori il cui limite è π .

Conclusione

In questo articolo abbiamo "rispolverato" una delle tante curiosità della matematica che, a causa della loro scarsa importanza, tendono a cadere nell'oblio, ma che non cessano di meravigliarci, quando, percorrendo strade diverse, fortuitamente ci imbattiamo in esse.

P.S.

Mi è venuto in mente, in un secondo momento, che si poteva fare a meno della trigonometria, sia nella dimostrazione che nella osservazione, mettendo da parte $cos(\alpha/4)$ e sfruttando invece nei ragionamenti, forse in maniera più semplice, le relazioni di proporzionalità esistenti fra i lati dei triangoli rettangoli simili OAK e ACH.

ARITMETICA SPICCIA

Dal primo numero della Domenica del Corriere (1899)

ELLE prime quattro operazioni aritmetiche, la moltiplicazione è certo quella che presenta maggiori difficoltà per coloro cui non riesce facile tenere a mente lunghe filze di cifre. Sono anzi in commercio delle tabelle a stampa nelle quali i prodotti sono esposti in ordine progressivo; ma poiche ad esse non si può sempre ricorrere, un polacco, il sig. Procopovitch, si è preoccupato di trovare un sistema di moltiplicazione semplice, pratico ed alla portata di tutti. Le dita delle mani, egli si è detto, sono dieci; e poiche il numero 10 forma la base della numerazione pratica di tutto il mondo, le due mani devono rappresentare un ottimo strumento aritmetico eminentemente economico e naturalmente tascabile. Infatti più tascabile delle mani non c'è nulla, se le tasche nacquero per le mani!

Il sistema suggerito dal Procopovitch essendo stato esperimentato in parecchie scuole francesi e tedesche con ottimo risultato, due altri signori - Vane Stow e T. Emery - lo allargarono e completarono così da ottenere la moltiplicazione fra loro dei numeri più alti, fino a 20, valendosi sempre delle dita delle mani.

Atteso l'interesse spiegato dagli scolari, e non soltanto dai più piccini, pel sistema di cui stiamo occupandoci, crediamo profittevole mostrare in che esso consista, servendoci di un articolo comparso in un fascicolo del Pearson's Magazine. Intercaliamo alla prosa qualche disegno

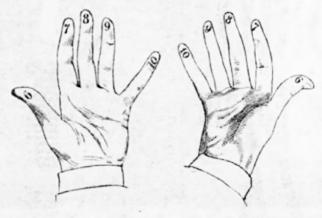
per rendere più facile la dimostrazione.

Base del sistema, che chiameremo anglo-polacco, è la divisione dei numeri in serie di cinque. Non occorre spendere parole intorno alla prima serie, comprendente i numeri da 1 a 5, dal momento ch'essa non presenta difficoltà di sorta, neppure pel ragazzo piu arretrato negli studi.

Cominciamo invece dalla seconda serie, vale a dire la

moltiplicazione delle cifre che vanno dal 6 al 10.

Il pollice di ciascuna mano rappresenta il numero 6, l'indice il 7, il medio l' 8, l'anulare il 9 ed il mignolo il 10.



Per moltiplicare una di codeste cifre per un'altra qualunque della serie stessa, basta congiungere le due dita che hanno il valore delle due cifre da moltiplicarsi. Il numero totale delle dita verso il conteggiatore — cioè dalla parte dei pollici, ed includendo i pollici stessi nonchè le due dita raccostate — rappresenterà il numero delle decine che dovrà risultare dalla moltiplicazione.

All'infuori del caso di 10 per 10, resterà inoltre in ciascuna mano un certo numero di dita non ancora contate: quelle oltre le dita riunite, verso i mignoli. Ora bisogna moltiplicare le dita libere di una mano per quella dell'altra (è evidente che tratterassi sempre di termini inferiori a 5), ed il prodotto rappresenterà le unità da aggiungersi alle decine già ottenute, formando così il numero completo. Basterà un esempio. Per moltiplicare 6 per 9 si unisce il pollice della destra all'anulare della sinistra, o viceversa.



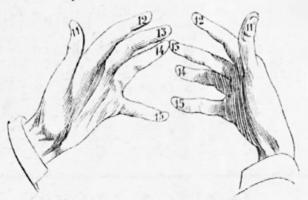
Vi sono quindi da sommare le due dita congiunte, un pollice un indice ed un medio: in tutto 5 e quindi 5 decine. L'unità è 4 (1 moltiplicato 4), essendoche rimasero quattro dita della destra ed uno della sinistra, o viceversa, non calcolate sin qui. Il risultato è quindi rappresentato da 5 decine e 4 unità: vale a dire 54.

Chi vorrà fare la prova troverà che tutte le altre combinazioni di questa seconda serie riescono parimenti facili.



Nella terza serie — da 11 a 15 — il pollice di ciascuna mano rappresenta l'11, l'indice il 12, e così via. Per moltiplicare due di queste cifre si congiungono le dita che rispettivamente le rappresentano. Come per la serie precedente, il numero totale delle dita verso il conteggiatore ha il valore delle decine ottenute; ma, cosa strana, in questa serie le dita che rimangono libere (quelle, cioè, oltre le dita congiunte) non servono a nulla. Bisogna invece, dopo stabilite le decine, servirsi nuovamente delle

stesse dita per trovare le unità; ciò che si ottiene moltiplicando quelle di una mano per quelle dell'altra. In questa serie sarà necessario aggiungere 100 ad ogni risultato prodotto dall'operazione manuale, perchè tutti i termini essendo superiori a 10, è ovvio che il risultato finale non potrà non essere superiore a 100.



Un esempio. Per moltiplicare 13 per 14 si raccosta il medio di una mano all'anulare dell'altra Le dita congiunte, insieme alle altre dalla parte del conteggiatore, rappresentano 7 decine, le quali con la suaccennata aggiunta di 100 fanno 170. Le unità si ottengono moltiplicando le quattro dita di una mano per le tre dell'altra (le stesse dita delle decine), ottenendo così 12, che aggiunte ai primi 170 danno il risultato finale di 182.

La prova materiale basterà a persuadere della esattezza dell'operazione.

Ed eccoci alla quarta serie comprendente i numeri da 16 a 20. I pollici rappresentano 16, gli indici 17, ecc. L'operazione varia ancora; non tanto però da non si poter ritenere facilmente.

Le dita congiunte e quelle altre dalla parte del conteggiatore rappresentano ciascuna due decine, vale a dire il numero 20, e devono sommarsi insieme, mentre le dita



rimaste libere dalla parte dei mignoli si moltiplicano fra loro, come per la serie seconda, allo scopo di ottenere le unità. Al risultato così ottenuto occorre aggiungere la cifra fissa di 200.

Moltiplichiamo, ad esempio, 16 per 17: una operazione

che, a memoria, riesce difficile anche per gli adulti. Il pollice della mano sinistra rappresenta il moltiplicando, ed essendo collocato contro l'indice della destra (il moltiplicatore) darà 3 per 20, vale a dire 60. Poi le quattro dita della mano sinistra rimaste libere moltiplicate per le tre della destra daranno 12, facendo col precedente 60 un totale di 72. Il prodotto ottenuto — con l'aggiunta obbligatoria di 200 — sarà quindi di 272: risultato raggiunto certo più rapidamente e con minore fatica dei metodi ordinari.

Un'operazione perfettamente simile darà il prodotto di qualunque numero moltiplicato per un altro della stessa serie.

Perchè giova tener presente che base, cardine di questo sistema manuale di moltiplicazione è che le cifre da moltiplicarsi fra loro appartengano entrambe ad un'identica serie, di cinque in cinque. In caso diverso occorre fare appello alla memoria, per chi l'ha, in difetto di memoria alle tabelle già allestite se si possiedono, oppure alla matita ed alla carta.

Mi sono chiesto come abbiano fatto Procopovitch e compagni ad ideare questo ingegnoso sistema, trovando la seguente spiegazione. Nell'esempio della terza serie, il risultato si ottiene sommando i tre addendi: 100, 70 e 12; vediamo dove si trovano:

$$13 * 14 =$$

$$= (10 + 3) * (10 + 4) =$$

$$= 10*10 + 10*4 + 3*10 + 3*4 =$$

$$= 100 + 10(4+3) + 12 = 100 + 70 + 12 = 182$$

In maniera analoga si possono spiegare le altre serie.

Considerando poi che:

$$23 * 24 =$$

$$= (20 + 3) * (20 + 4) =$$

$$= 400 + 20(4+3) + 12 = 400 + 140 + 12 = 552$$

si vede come si possa estendere il sistema alle serie di cinquine di numeri fino a 100 (e oltre). Esempio:

$$43 * 44 =$$

$$= (40 + 3) * (40 + 4) =$$

$$= 1600 + 40(4+3) + 12 = 1600 + 280 + 12 = 1892$$

Basta individuare, per ciascuna serie, la terna mnemonica risolvente da memorizzare. Mi chiedo come mai gli ideatori del sistema non ci abbiano pensato.

Un ragionamento "complementare" per dimostrare il problema di Monty Hall.

Il problema di Monty Hall (o paradosso di Monty Hall) è un famoso problema di teoria della probabilità, legato ad un gioco a premi statunitense condotto da Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall.

Mi sono accostato al problema di Monty Hall leggendo il romanzo "Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte" di Mark Haddon.

Formulazione del problema: Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Ti conviene cambiare la tua scelta originale?

Nel tentativo di trovare una soluzione, mi sono messo nei panni del concorrente, facendo questo semplice ragionamento "complementare": «Se accettassi di cambiare la mia scelta iniziale, che probabilità avrei di vincere trovando un'auto? Avrei la stessa (perchè concomitante) probabilità che avevo di perdere, trovando una capra con la prima scelta. Questa probabilità vale 2/3. E che probabilità avrei invece, cambiando, di trovare una capra? La stessa che ho avuto di vincere un'auto con la prima scelta, cioè 1/3. Perciò, accetto di cambiare la mia scelta». In questo approccio al problema si considerano due soli scenari, quelli finali introdotti dalla proposta al concorrente di cambiare la sua scelta iniziale, che sono poi le configurazioni essenziali, dalla cui analisi scaturisce la soluzione del problema. La rivelazione del conduttore ha posto il concorrente davanti ad una scelta, che non è "alternativa" fra le due restanti possibilità (50% - 50%), come molti matematici all'inizio hanno erroneamente creduto, ma "complementare" fra tre situazioni, dovendosi analizzare tutte e tre gli scenari possibili, non solo quello in atto. Ne risulta una sorta di applicazione del principio logico del "Rasoio di Occam", che, oltre a semplificare il problema, fornisce con la sua analisi risolutiva una più chiara spiegazione del problema stesso.

Per seguire meglio la discussione consiglio di rileggere osservando uno schema a griglia 3x3 indicante le tre possibili situazioni del gioco, così come formulato. Il rapporto di complementarità fra le probabilità relative alle due scelte del problema, si vede chiaramente dal confronto fra i risultati evidenziati in celeste e arancio.



Ancora una considerazione. Il ragionamento sopra esposto e le varie dimostrazioni matematiche, forniscono la certezza sull'opportunità di eseguire il cambio della scelta iniziale. Ma anche se dovesse persistere un dubbio, la scelta di cambiare sarebbe consigliata. Il dubbioso infatti dovrebbe pensare: «Non so se col cambio la probabilità del mio successo muterebbe. Non potrebbe comunque andare sotto 1/3; potrebbe restare immutata, ma potrebbe anche aumentare! Perciò cambio». Sarebbe invece questo il ragionamento che applica il "Rasoio di Occam".

Pubblicato su Wikipedia: Problema di Monty Hall/Discussione il 7 apr 2020.

Ricorrenze ... ricorrenti.

Oggi, 13 giugno 2017, si festeggia il 9° compleanno di mia nipote Camilla. Ieri è stato il 45° compleanno di sua madre, mia figlia Daniela (i parenti possono verificare).

Praticamente Camilla compie oggi 1/5 degli anni della madre. Una considerazione banale questa, che però diventa intrigante se si considera ciò che segue:

Fra 3 anni Daniela compirà 48 anni e Camilla 12 anni, cioè 1/4 degli anni di sua madre.

Fra 9 anni (3 al quadrato) Daniela compirà 54 anni e Camilla 18 anni, che è 1/3 dell'età di sua madre.

Fra 27 anni (3 al cubo) Daniela compirà 72 anni e Camilla 36 anni, cioè 1/2 degli anni di sua madre.

Polygonal, Pyramidal and Hypersolid numbers

1 Decomposition of polygonal numbers

In this section, we will formulate and prove a proposition that will enable us to obtain the integers sequences associated with each polygonal number.

Proposition

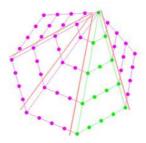
Each k-gonal number p(k, n) can be decomposed into the sum of a triangular number T(n) plus k-3 triangular numbers T(n-1):

$$p(k,n) = T(n) + (k-3)T(n-1)$$
(1)

Inversely, each k-gonal number is given by the sum of a triangular number T(n) plus k-3 triangular numbers T(n-1).

Proof

Consider a regular polygon of k sides, that we associate to the figurate k-gonal(n) number. From a vertex of that polygon, track the joining line with other vertices, as in the heptagon example ¹ shown in the next figure:



Are thus obtained k-2 triangular areas. If to any of these areas we associate the triangular number T(n), each of the other k-3 remaining areas are associated with the triangular number T(n-1), as can be seen by counting in the figure. Summing all triangles, we obtain the (1).

¹ This is an inductive process, so the reasoning is true for any number of sides k.

Note that polygonal numbers are produced by summing arithmetical progressions.

Substituting into (1) the triangular number formula: T(n) = n(n+1)/2, one obtains:

$$p(k,n) = n(n+1)/2 + (k-3)(n-1)((n-1)+1)/2$$

that factored becomes:

$$p(k,n) = n[(k-2)n - (k-4)]/2$$
(2)

This is the same formula that appears on Wolfram MathWorld, page polygonal number, pos. (5), as it should be.

Formula (2) allows us to obtain all k-gonal numbers. We used it to get the following integer sequences, not yet present ² in the OEIS database:

25-gonal number: a(n) = n(23n - 21)/2

26-gonal number: a(n) = n(12n - 11)

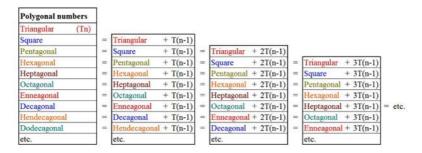
27-gonal number: a(n) = n(25n - 23)/2

28-gonal number: a(n) = n(13n - 12)

29-gonal number: a(n) = n(27n - 25)/2

30-gonal number: a(n) = n(14n - 13)

Formula (1) allows us to construct the following table of relations between polygonal numbers:



The table continue indefinitely in both directions. From it you can also derive, by performing substitutions, many other relationships, such as:

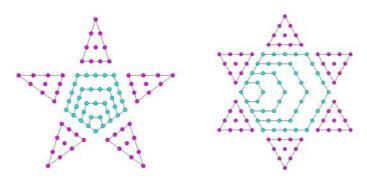
$$Dod(n) = Enn(n) - Hep(n) + Hex(n) + Pen(n) - Tri(n) + 2T(n-1)$$

 $^{^2}$ The 28-gonal number sequence A161935 is in the database, but with different name and meaning.

2 Star k-gonal numbers

We will show in this section how you can create, using polygonal numbers, a particular set of figurate numbers having star shape.

We will build these figurate numbers by placing on the sides of a k-gonal number, k triangular numbers, as in the cases k=5 and k=6 shown in the following figure:



As can be seen, the triangular numbers to be placed on the sides of polygons they must be always of the n-1 order.

In our research, we just build figurate numbers using polygonal numbers from the 5-gonal to the 12-gonal, thus obtaining integer sequences, all stored in the OEIS database, but with different name and meaning.

We then added, in the comments section of the found sequences, the following annotations:

$$\begin{array}{l} \mathrm{A001107}\;(n) = \mathrm{A000326}(n) + 5*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051624}\;(n) = \mathrm{A000384}(n) + 6*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051866}\;(n) = \mathrm{A000566}(n) + 7*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051868}\;(n) = \mathrm{A000567}(n) + 8*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051870}\;(n) = \mathrm{A001106}(n) + 9*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051872}\;(n) = \mathrm{A001107}(n) + 10*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051874}\;(n) = \mathrm{A051682}(n) + 11*\mathrm{A000217}(n-1) \\ \mathrm{A051876}\;(n) = \mathrm{A051624}(n) + 12*\mathrm{A000217}(n-1) \end{array}$$

Observations

From what we saw in the above sections, it is apparent that:

- 1 any k-gonal number is obtained from the previous (k-1)-gonal number by adding to it a triangular number T(n-1);
- 2 by adding m times the triangular number T(n-1) to a k-gonal number, you get the (k+m)-gonal number;
- 3 by adding k times the triangular number T(n-1) to a k-gonal number, you get the 2k-gonal number, which is also the star k-gonal number³.

3 Pyramidal Numbers

Pyramidal numbers are obtained by piling successive polygonal numbers one upon the other. We will formulate and prove a proposition that will enable us to obtain integer sequences associated to each k-gonal pyramidal number.

Proposition

Each k-gonal pyramidal number P(k, n) can be decomposed into the sum of a tetrahedral number Te(n) plus k-3 tetrahedral numbers Te(n-1):

$$P(k,n) = Te(n) + (k-3)Te(n-1)$$
(3)

Inversely, each k-gonal pyramidal number is given by the sum of a tetrahedral number Te(n) plus k-3 tetrahedral numbers Te(n-1).

Proof

The proof is carried out in a completely analogous way to that made in Section 1 of this article. The roles of T(n) and T(n-1) are carried out here by Te(n) and Te(n-1) respectively. Vertices become edges, sides become faces, triangles become pyramids. A graphic representation is difficult to achieve, but easy to imagine: see to a succession of layers stacked to form a pyramid, each of which represents the polygonal number p(k,n) (n=1,2,...,n). So then, pyramidal numbers will be given by partial sums of polygonal numbers:

$$P(k,n) = \sum_{q=1}^{n} p(k,n) = \sum_{q=1}^{n} T(n) + (k-3) \sum_{q=1}^{n} T(n-1)$$

ie, the proposition to be proven.

Substituting in (3) the tetrahedral number formula: Te(n) = n(n+1)(n+2)/6, one obtains:

³ This follows from the topological identity of figures.

$$P(k,n) = n(n+1)(n+2)/6 + (k-3)n(n-1)(n+1)/6$$

that factored becomes:

$$P(k,n) = n(n+1)[(k-2)n + (5-k)]/6$$
(4)

This is the same formula that appears on Wolfram MathWorld, page Pyramidal Number, pos. (1), as it should be.

Formula (4) allows us to obtain all k-gonal pyramidal numbers. We used it to get the following integer sequences, not yet present in the OEIS database :

25-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(23n-20)/6

26-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(8n-7)/2

27-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(25n-22)/6

28-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(26n-23)/6

29-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(9n-8)/2

30-gonal pyramidal number: a(n) = n(n+1)(28n-25)/6

Even here, as was done at the end of Section 1, it would be possible to organize a table to derive complex relationships between k-gonal pyramidal numbers.

4 Four-dimensional solid numbers

In the preceding section 3 we saw how, by performing partial sums of plan polygonal numbers, you get the corresponding solid pyramidal numbers. This procedure can be extended to generate solid numbers in higher dimensions. Thus, by piling successive pyramidal numbers, one obtains four-dimensional solid numbers, whose base is the n-th pyramidal number.

Consider the hypertetrahedral number obtained by summing tetrahedral numbers:

$$Z(n) = \sum_{q=1}^{n} Te(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)/24$$
 (5)

We will use this figurate number to reformulate propositions (1) and (3) in 4D space. Let F(k, n) denote the n-th four-dimensional solid number, then one can say:

Each 4D solid number F(k,n) can be decomposed into the sum of a hypertetrahedral number Z(n) plus k-3 hypertetrahedral numbers Z(n-1):

$$F(k,n) = Z(n) + (k-3)Z(n-1)$$
(6)

Inversely, each 4D solid number is given by the sum of an hypertetrahedral number Z(n) plus k-3 hypertetrahedral numbers Z(n-1).

In fact, from (3) one obtains by summing:

$$F(k,n) = \sum_{q=1}^{n} Te(n) + (K-3) \sum_{q=1}^{n} Te(n-1)$$

ie, the proposition to be proven.

Substituting into (6) the hypertetrahedral number formula (5), and factoring, you get the general formula:

$$F(k,n) = n(n+1)(n+2)[(k-2)n - (k-6)]/24$$
 (7)

This formula allows to get all four-dimensional solid numbers.

5 Multidimensional solid numbers

In summary, we have so far achieved the following general formulas:

$$2D$$
 space: $p(k,n) = n[(k-2)n - (k-4)]/2$

3D space:
$$P(k,n) = n(n+1)[(k-2)n - (k-5)]/6$$

4D space:
$$F(k,n) = n(n+1)(n+2)[(k-2)n - (k-6)]/24$$

that we can generalize to subsequent j-dimensional spaces:

$$S(j,k,n) = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+j-2)}{2 \times 3 \times 4... \times j} [(k-2)n - (k-(j+2))]$$

where S(j, k, n) denote the *n*-th hypersolid number in the *j*-dimensional space.

6 Diagonal sequences

Consider the general formula derived in Section 1:

$$p(k,n) = n[(k-2)n - (k-4)]/2$$
(8)

As n and k vary, this formula generates the following table of polygonal numbers:

n	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
6	21	36	51	66	81	96	111	126	141	156	171
7	28	49	70	91	112	133	154	175	196	217	238
8	36	64	92	120	148	176	204	232	260	288	316
9	45	81	117	153	189	225	261	297	333	369	405
10	55	100	145	190	235	280	325	370	415	460	505
11	66	121	176	231	286	341	396	451	506	561	616

Columns contain sequences of k-gonal numbers, starting from triangular numbers (k = 3). We look the yellow sequence in the main diagonal of the table. The formula of this sequence is derived from (8) by substituting k = n + 2 and factoring. You get:

$$d_2(n) = n(n^2 - n + 2)/2$$

With k = n + 3, you get the adjacent diagonal sequence, and so on.

Similarly, from other general formulas listed in Section 5, are obtained other hypersolid numbers tables and other formulas for related diagonal sequences. Even these formulas are generalizable by recurrence. In fact, we have:

$$d_3(n) = n(n+1)(n^2 - n + 3)/6$$

$$d_4(n) = n(n+1)(n+2)(n^2 - n + 4)/24$$

In general:

$$d_j(n) = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+j-2)}{2 \times 3 \times 4... \times j} (n^2 - n + j)$$

7 Diagonal sums

Let us examine again the above table. Another interesting sequence is that obtained by summing polygonal numbers diagonally, starting from the top left. You get: 1, 4, 11, 25, 50,..., whose formula is:

$$D_2(n) = n(n+1)(n^2 + n + 10)/24$$

This formula is obtained from "Mathematica" with the following command:

Inserting sequences of successive j-rank spaces, one obtains:

$$D_3(n) = n(n+1)(n+2)(n^2+2n+17)/120$$

$$D_4(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+3n+26)/720$$

In general:

$$D_j(n) = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+j-1)}{2 \times 3 \times 4... \times (j+2)} [n^2 + (j-1)n + ((j+1)^2 + 1)]$$

8 Conclusions

Concluding this brief structural analysis, we can say that, using unit bricks T(n-1), we can construct, above the basic number T(n), all the possible k-gonal and star k-gonal numbers. In 3D space, using unit bricks Te(n-1), we can construct, above the basic number Te(n), all the possible k-gonal pyramidal numbers. Likewise, in j-dimensional spaces, using unit bricks corresponding to k=3, we can construct all the possible hypersolid numbers.

Second partial sums of m-th powers

We consider the sums of powers of successive integers:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m} = 1^{m} + 2^{m} + \dots + n^{m}$$

which, as we know, are calculated with the <u>Faulhaber</u> polynomials, as follows:

$$\begin{split} \sum_{k=1}^n k &= 1/2(n^2+n) \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= 1/6(2n^3+3n^2+n) \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= 1/4(n^4+2n^3+n^2) \\ \sum_{k=1}^n k^4 &= 1/30(6n^5+15n^4+10n^3-n) \\ & \dots \text{ etc. etc.} \end{split}$$

Each of these formulas generates, as n varies, an increasing numerical sequence, of the type of that obtained for m=2:

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, \dots$$

that is the sequence of the square pyramidal numbers.

We aim to find a way to calculate, given any of these sequences, the sum of its first n terms, that is, the $second\ partial\ sums\ of\ the\ m-th\ powers.$

An opportunity to obtain this is offered by the following table:

1 ^m	1"	1 ^m	1"	1"	1"	1"	1"	 1"	1"
2 ^m	2"	2 ^m	2"	2 ^m	2"	2"	2"	 2"	2"
3 ^m	 3 ^m	3 ^m							
4 ^m	 4"	4 ^m							
5 ^m	 5 ^m	5 ^m							
6 ^m	 6 ^m	6 ^m							
7 ^m	7 ^m	7 ^m	7"	7 ^m	7 ^m	7"	7"	 7"	7"
:	••	••	:	••	••	••	••	 ••	••
$(n-1)^m$	 $(n-1)^m$	$(n-1)^m$							
n m	n^{m}	n^m	n^m	n^m	n^m	n^{m}	n^m	 n^{m}	n^{m}

By summing the content of each column (green+yellow boxes), we obtain the sum of the first n m-th powers, that (in tribute to Faulhaber) we denote by $F_{(m)}$:

$$F_{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

and the contents of the entire table will be then:

$$(n+1)F_{(m)} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m}$$

The green section contains, in each row, the amount: $K^m \times K = K^{(m+1)}$. By summing the contents of all rows of this section, one obtains the sum of the first n (m+1)-th powers:

$$F_{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} k^{(m+1)}$$

The yellow section contains, in the columns, the sequence of $F_{(m)}$ sums. By summing the contents of all columns of this section, one obtains the second partial sums of the m-th powers.

The quantity that we seek is then obtained by subtracting to the content of the entire table, the content of the green boxes, that is:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{(m)} = (n+1)F_{(m)} - F_{(m+1)}$$
 (1)

As we shall see later, this formula will enable us to conduct a research, limitless and in every direction, to find polynomial expressions generating integer sequences of sums of powers of every order and grade.

By performing algebraic calculations for m=3, you get:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{(3)} = (n+1)F_{(3)} - F_{(4)} = (n+1)[(n^2+n)/2]^2 - (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)/30 = (3n^5 + 15n^4 + 25n^3 + 15n^2 + 2n)/60$$

Polynomials obtained for m from 1 to 8 are listed in the following table:

m	Second partial sums of m-th powers
1	$(n^3 + 3n^2 + 2n)/6$
2	$(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n)/12$
3	$(3n^5 + 15n^4 + 25n^3 + 15n^2 + 2n)/60$
4	$(2n^6 + 12n^5 + 25n^4 + 20n^3 + 3n^2 - 2n)/60$
5	$(2n^7 + 14n^6 + 35n^5 + 35n^4 + 7n^3 - 7n^2 - 2n)/84$
6	$(3n^8 + 24n^7 + 70n^6 + 84n^5 + 21n^4 - 28n^3 - 10n^2 + 4n)/168$
7	$(5n^9 + 45n^8 + 150n^7 + 210n^6 + 63n^5 - 105n^4 - 50n^3 + 30n^2 + 12n)/360$
8	$(2n^{10} + 20n^9 + 75n^8 + 120n^7 + 42n^6 - 84n^5 - 50n^4 + 40n^3 + 21n^2 - 6n)/180$

Polynomial expressions generated by (1) are the natural extension of those listed at the beginning. The general formula for obtaining them in a direct way is written, in the compact notation of Faulhaber formula, in the following way:

$$\begin{split} &\sum_{k=1}^{n} F_m = (n+1)F_m - F_{(m+1)} \\ &= \frac{n+1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} - \frac{1}{m+2} (-1)^k \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} B_k (n+1)^{m+2-k} \end{split}$$

where the B_k quantities are the <u>Bernoulli numbers</u>.

This formula calculates, for each natural number n, the second partial sums of the m-th powers.

Example of calculation

Formulas and data of this contribution were obtained using some tools found in Internet.

Faulhaber's formulas are computed using a spreadsheet as follows (*):

$$F_{(m)} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & & & & \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 & \\ 1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 482 & 482 & 330 & 168 & 65 & 111 & 1 \\ 1 & 12 & 66 & 220 & 495 & 792 & 924 & 792 & 495 & 220 & 66 & 12 & 1 \\ 1 & 13 & 78 & 286 & 715 & 1287 & 1716 & 1287 & 715 & 286 & 78 & 13 & 1 \\ 1 & 14 & 91 & 364 & 1001 & 2002 & 3003 & 3432 & 3003 & 2002 & 1001 & 364 & 91 & 14 & 1 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 38 & 9 & 1 & & & & & \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 38 & 9 & 1 & & & & & & \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 38 & 9 & 1 & & & & & & \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 38 & 9 & 1 & & & & & & \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & & & & & \\ F_{(0)} = 1/8 (n^{-9} + 9)2/n^{-8} & +6n^{-7} & -21/8n^{-5} & +2n^{-3} & -3/10n) & & & & & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15/2n^{-8}) & -7n^{-6} & +5n^{-4} & -3/2n^{-2}) & & & \\ F_{(0)} = 1/10 (n^{-1}10 + 5n^{-9} + 15$$

The formula proposed in comments: b(n,m) = (n+1)*F(m) - F(m+1), is inserted in the following widget: http://www.wolframalpha.com/input/?i=factor+



factor ((n+1)*1/9(n^9+9/2n^8+6n^7 -21/5n^5+2n^3-3/10n) - 1/10(n^10+5n^9+15/2r 🌣 🗏

Partial sums of m-th powers with Faulhaber polynomials

In previous section we saw how to use Faulhaber polynomials $F_{(m)}$ to obtain formulas of second partial sums of m-th powers.

We will seek now an iterative process for deriving, starting from the formula (1) of previous section, the polynomial expressions that calculate the partial sums later.

Whereas each partial sum represents, by definition, the sum of the first q terms of the previous sum, we have, in general:

$$P_{j(m)} = \sum_{n=1}^{q} P_{j-1(m)}$$

Then, the polynomial expression of the j-th partial sum of the m-th power is obtained by adding (from 1 to q) all terms of the polynomial of the previous partial sum. In the practice is better to use non factored polynomials, ranked according to n powers: to each power of n will correspond the $F_{(m)}$ polynomial.

We will perform the derivation of the polynomial P_3 on the first power:

$$P_{2(1)} = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6$$

$$P_{3(1)} = \sum_{n=1}^{q} P_{2(1)} = \sum_{n=1}^{q} (n^3 + 3n^2 + 2n)/6$$

$$= (F_{(3)} + 3F_{(2)} + 2F_{(1)})/6 = n(1+n)(2+n)(3+n)/24$$

The knowledge 1 of the general formula (1) enables then, using Faulhaber polynomials, the direct derivation of the m-th power formulas.

With <u>Mathematica</u>, using mainly Factor and Table commands and a bit of copy and paste, you get faster:

m	Third partial sums of m-th powers: P _{3(m)}
1	n*(1+n)*(2+n)*(3+n)/24
2	n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(3+2*n)/120
3	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(1+3*n+n^2)/120$
4	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(3+2*n)*(-1+6*n+2*n^2)/840$
5	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(-1+2*n+n^2)*(2+4*n+n^2)/336$
6	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(3+2*n)*(2-30*n+35*n^2+30*n^3+5*n^4)/5040$
7	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(6-6*n-20*n^2+15*n^3+25*n^4+9*n^5+n^6)/720$
8	$n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(3+2*n)*(1+36*n-69*n^2+45*n^4+18*n^5+2*n^6)/3960$

Ignoring the (1) we would not have $P_{2(1)}$ that enabled us to derive $P_{3(1)}$.

```
Fourth partial sums of m-th powers: P<sub>4(m)</sub>
\frac{1}{n}(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)/120
n*(1+n)*(2+n)^2*(3+n)*(4+n)/360
3 n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(2+4*n+n^2)/840
4 n*(1+n)*(2+n)^2*(3+n)*(4+n)*(-1+12*n+3*n^2)/5040
 6 \left[ n*(1+n)*(2+n)^2*(3+n)*(4+n)*(-1-8*n+14*n^2+8*n^3+n^4)/5040 \right] 
8 n^{4}(1+n)^{4}(2+n)^{2}(3+n)^{4}(4+n)^{4}(1+4^{2}n+n^{2})^{4}(21-48^{2}n+20^{2}n^{2}+16^{2}n^{3}+2^{2}n^{4})^{2}(23760+10^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^{2}n^{2}+16^
                                                                               Fifth partial sums of m-th powers: P5(m)
1 n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(5+n)/720
2 n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(5+n)*(5+2*n)/5040
3 n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(5+n)*(10+15*n+3*n^2)/20160
4 n^2*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(5+n)^2*(5+2*n)/30240
 6 n*(1+n)*(2+n)*(3+n)*(4+n)*(5+n)*(5+2*n)*(-3+5*n+n^2)*(4+15*n+3*n^2)/332640
```

... etc. etc.

Pascal's triangle and recurrence relations for partial sums of m-th powers

We build with Excel the table that calculates, for successive additions (left cell+top cell) the partial sums of powers of positive integers:

n	n m	1 th sums	2 th sums	3 th sums
1				
2				
3			d	
4		b	e	
5	a	с	f	
6				
7				

We want to obtain the recurrence relation for second sums, that is a formula for calculating the n-th term in the column "2th sums" as a function of the previous terms.

The formula that we seek is obtained by analyzing the data in the table as follows:

$$c = a + b$$

 $e = b + d$
 $f = c + e = a + b + e = a + e - d + e$
 $f = 2e - d + a$

Indicating with $a_{(n,m)}$ the *n*-th term of the sequence, we therefore have:

2th sums:
$$a_{(n,m)} = 2a_{(n-1,m)} - a_{(n-2,m)} + n^m$$

Extending the previous scheme to the successive columns, one obtains:

3th sums:
$$a_{(n,m)} = 3a_{(n-1,m)} - 3a_{(n-2,m)} + a_{(n-3,m)} + n^m$$

4th sums: $a_{(n,m)} = 4a_{(n-1,m)} - 6a_{(n-2,m)} + 4a_{(n-3,m)} - a_{(n-4,m)} + n^m$

From this point forward we continue (successfully) using <u>Pascal's triangle</u>, by alternating signs, with the following results:

5th sums:
$$a_{(n,m)} = 5a_{(n-1,m)} - 10a_{(n-2,m)} + 10a_{(n-3,m)} - 5a_{(n-4,m)} + a_{(n-5,m)} + n^m$$
 and so on ...

So, if we denote by p the order number of the partial sums, its recurrence relation is obtained by the following general formula:

$$a_{(n,m)} = \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k+1} a_{(n-1-k,m)} \right] + n^m$$

This was a "non linear" recurrence relation between the sequence terms. There are also "linear" recurrence relations, obtainable from Pascal's triangle, having the following general formula:

$$a_{(n,m)} = \sum_{k=0}^{p+m-1} (-1)^k \binom{p+m}{k+1} a_{(n-1-k,m)}$$

Example: for the "fourth partial sums of sixth powers" you get the linear relationship:

$$\begin{array}{l} a_{(n)} = 10a_{(n-1)} - 45a_{(n-2)} + 120a_{(n-3)} - 210a_{(n-4)} + 252a_{(n-5)} - 210a_{(n-6)} \\ + 120a_{(n-7)} - 45a_{(n-8)} + 10a_{(n-9)} - a_{(n-10)} \end{array}$$

The coefficient lists of such expressions are shown in <u>OEIS</u> with the term "signature".

Example of demonstration

We insert in Excel sequences of "Second partial sums of m-th powers", arranging them in a table as follows:

	Second partial sums of m-th powers											
		<u>A101089</u> <u>A101092</u> <u>A101093</u> <u>A250212</u>						<u>A250212</u>				
n	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7				
1	1	1	1	1	1	1	1	1				
2	3	4	6	10	18	34	66	130				
3	6	10	20	46	116	310	860					
4	10	20	50	146	470	1610	5750	21146				

We know the recurrence relation:

$$a_{(n,m)} = 2a_{(n-1,m)} - a_{(n-2,m)} + n^m$$
 For $n = 2$ we have:
$$a_{(2,m)} = 2 \times 1 - 0 + 2^m$$

$$= 2^m + 2$$
 For $n = 3$:
$$a_{(3,m)} = 2a_{(2,m)} - a_{(1,m)} + 3^m = 2(2^m + 2) - 1 + 3^m$$

$$= 2^{m+1} + 3^m + 3$$

and so on ...

Horizontal sequences

We insert in Excel sequences of "Third partial sums of m-th powers", arranging them in a table as follows:

	Second partial sums of m-th powers											
n	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7				
1	1	1	1	1	1	1	1	1				
2	3	4	6	10	18	34	66	130				
3	6	10	20	46	116	310	860	2446				
4	10	20	50	146	470	1610	5750	21146				
5	15	35	105	371	1449	6035	26265	117971				
6	21	56	196	812	3724	18236	93436	494732				
7	28	84	336	1596	8400	47244	278256	1695036				
8	36	120	540	2892	17172	109020	725220	4992492				
9	45	165	825	4917	32505	229845	1703625	13072917				
10	55	220	1210	7942	57838	450670	3682030	31153342				
- 11	66	286	1716	12298	97812	832546	7431996	68720938				
12	78	364	2366	18382	158522	1463254	14167946	142120342				

Consider the recurrence relation for 2th sums seen above:

$$a_{(n,m)} = 2a_{(n-1,m)} - a_{(n-2,m)} + n^m$$

We will use this relationship to derive formulas of sequences that appear in each row of the table.

The opportunity to do this lies in the fact that the above relationship is valid, for all n, in every column of the table, and then for each term of the considered horizontal sequence. You get formulas by replacing subsequently, in the general recurrence relation, polynomials that gradually you get, starting from n=2. This is an inductive process that applies to any order of partial sums of m-th powers.

We perform here derivations of formulas until the $a_{(6,m)}$ sequence.

$$n=2:\ a_{(2,m)}=2\times 1-0+2^m=\boxed{2^m+2}$$

$$n=3:\ a_{(3,m)}=2a_{(2,m)}-a_{(1,m)}+3^m=2(2^m+2)-1+3^m=\boxed{2^{m+1}+3^m+3}$$

$$n=4:\ a_{(4,m)}=2a_{(3,m)}-a_{(2,m)}+4^m=2(2^{m+1}+3^m+3)-(2^m+2)+4^m$$

$$=\boxed{3\times 2^m+2^{2m}+2\times 3^m+4}$$

$$n=5:\ a_{(5,m)}=\boxed{2^{m+2}+2^{2m+1}+3^{m+1}+5^m+5}$$

$$n=6:\ a_{(6,m)}=\boxed{5\times 2^m+3\times 4^m+4\times 3^m+2\times 5^m+6^m+6}$$

This process works indefinitely, generating polynomial expressions longer and longer, which in turn generate sequences with terms that magnify more and more rapidly. I personally found sequences up to the fifth partial sums, visible in the OEIS Encyclopedia.

Antidiagonal sums of j-th partial sums of m-th powers

Let us examine the array formed by the j-th partial sums of third powers:

	j-th partial sums of third powers												
n	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7					
1	1	1	1	1	1	1	1	1					
2	8	9	10	11	12	13	14	15					
3	27	36	46	57	69	82	96	111					
4	64	100	146	203	272	354	450	561					
5	125	225	371	574	846	1200	1650	2211					
6	216	441	812	1386	2232	3432	5082	7293					
7	343	784	1596	2982	5214	8646	13728	21021					
8	512	1296	2892	5874	11088	19734	33462	54483					
9	729	2025	4917	10791	21879	41613	75075	129558					
10	1000	3025	7942	18733	40612	82225	157300	286858					
11	1331	4356	12298	31031	71643	153868	311168	598026					
12	1728	6084	18382	49413	121056	274924	586092	1184118					
	1	9	37	111	283	657	1441	3051					

An interesting sequence in this table is that obtained by summing data diagonally, as shown in figure, starting from the top left. You get: 1, 9, 37, 111, 283, ... Inserting this sequence in "Mathematica", using the command:

$$Factor[FindSequenceFunction[1, 9, 37, 111, 283, ..., n]]$$

you get the formula:

$$a(n) = 13(2^n - 1) - 3n^2 - 9n$$

Inserting also sequences thus obtained from preceding and successive m-th powers tables, one obtains:

Looking in OEIS for recurrences in this table, I discover that the blue sequence is given by $\underline{A000670}$, and $\underline{A208744}$ gives the triangle of coefficients. This result speaks for itself, I plugged it at $\underline{A257448}$.

The differences of m-th powers

The first differences of the m-th powers are computed, by definition, in the following way:

$$D_{1(m)} = n^m - (n-1)^m (2)$$

Using the program "Mathematica" you get from the (2) the following complete polynomials:

m	First differences of <i>m</i> -th powers: $D_{1(m)} = n^m - (n-1)^m$	
1	1]
2	-1 + 2 n	OFF. 1
3	$1 - 3 n + 3 n^2$	
4	$-1 + 4 n - 6 n^2 + 4 n^3$	
5	1 - 5 n + 10 n ² - 10 n ³ + 5 n ⁴	
6	-1 + 6 n - 15 n^2 + 20 n^3 - 15 n^4 + 6 n^5	
7	1 - 7 n + 21 n ² - 35 n ³ + 35 n ⁴ - 21 n ⁵ + 7 n ⁶	
8	-1 + 8 n - 28 n^2 + 56 n^3 - 70 n^4 + 56 n^5 - 28 n^6 + 8 n^7	
9	1 - 9 n + 36 n^2 - 84 n^3 + 126 n^4 - 126 n^5 + 84 n^6 - 36 n^7 + 9 n^8]

You will get the subsequent differences by replacing n with (n-1) in the corresponding polynomials having degree >1 of the preceding tables:

m	Second differences of m -th powers: $D_{2(m)}$	
1]
2	2	OFF. 2
3	6 (-1 + n)	
4	2 (7 - 12 n + 6 n^2)	
5	$10(-3 + 7 n - 6 n^2 + 2 n^3)$	
6	2 (31 - 90 n + 105 n^2 - 60 n^3 + 15 n^4)	
7	14 (-1 + n) (9 - 22 n + 23 n^2 - 12 n^3 + 3 n^4)	
8	2 (127 - 504 n + 868 n^2 - 840 n^3 + 490 n^4 - 168 n^5 + 28 n^6)	
9	6 (-1 + n) (85 - 296 n + 460 n^2 - 408 n^3 + 222 n^4 - 72 n^5 + 12 n^6)	

m	Third differences of m -th powers: $D_{3(m)}$	
1]
2		OFF. 3
3	6	
4	12 (-3 + 2 n)	
5	$30 (5 - 6 n + 2 n^2)$	
6	$60 (-3 + 2 n) (3 - 3 n + n^2)$	
7	42 (43 - 90 n + 75 n^2 - 30 n^3 + 5 n^4)	
8	84 (-3 + 2 n) (23 - 42 n + 32 n^2 - 12 n^3 + 2 n^4)	
9	6 (3025 - 8694 n + 10836 n^2 - 7560 n^3 + 3150 n^4 - 756 n^5 + 84 n^6)	

m	Fourth differences of m -th powers: $D_{4(m)}$	
1		
2		OFF. 4
3		
4	24	
5	120(-2+n)	
6	120 (13 - 12 n + 3 n^2)	
7	$840 (-2 + n) (5 - 4 n + n^2)$	
8	168 (243 - 400 n + 260 n^2 - 80 n^3 + 10 n^4)	
9	504 (-2 + n) (185 - 272 n + 164 n^2 - 48 n^3 + 6 n^4)	

and we could continue indefinitely.

The so obtained polynomials, properly factored, provides formulas to calculate, at various orders, the differences of m-th powers.

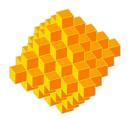
Note that, from each table, you get sequences whose <u>offset</u> is equal to the differences order number.

Conclusion

In January 2015, I discovered that many of sequences obtained by the above procedures were not yet in the OEIS Encyclopedia database. This, in some way, gave me confirmation of newness of the introduced derivation procedures. I then immediately worked, contributing to the database OEIS with 84 new integer sequences, all approved and published in about two months.

The Centered Octahedral Number

Strolling among the figurate numbers, I met the Centered Octahedral Number, which is a construction formed by concentric layers of cubes accreting ¹ around a central cube, as in the following figure:



This number, denoted by C_n , is given by the formula:

$$C_n = \frac{(2n+1) \times (2n^2 + 2n + 3)}{3} \tag{1}$$

The first centered octahedral numbers (n = 0, 1, 2, ...) are: 1, 7, 25, 63, 129, 231, 377, 575, 833, 1159 (sequence A001845 in OEIS).

I wondered if, as it happens for the Octahedral Number 2 , this number can be expressed in terms of square pyramidal numbers $P_n(n=1,2,3,...)$. You get the answer immediately, by looking at the following diagram, which shows, layer by layer, the concentric accretions around the central cube of the layer:

¹The centered octahedral number was born in mineralogy, from the study of the "accreting" of octahedral crystals around a central source.

 $^{^2}$ The octahedral number O_n represents an octahedron, or two square-based pyramids with a common base. It is easy to see, by observing its construction, that the n-th octahedral number is obtained by summing the (n-1)-th to the n-th square pyramidal number.

On the right is shown the breakdown of the scheme in terms of sums P. Also this scheme can be generalized by induction, so we can write:

$$C_n = 2P_n + P_{n+1} + P_{n-1} (2)$$

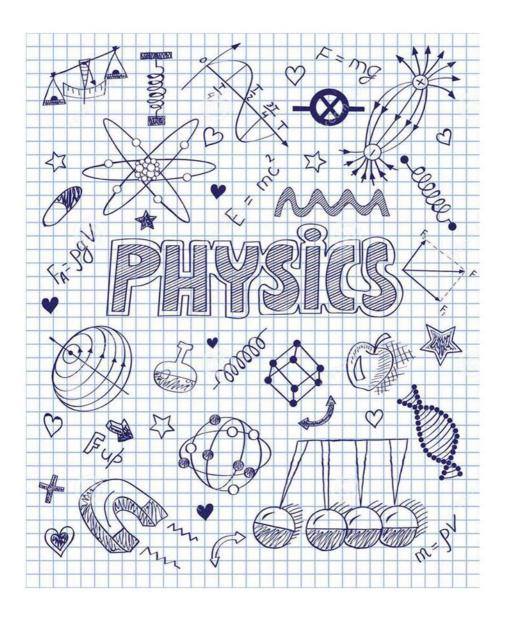
But the second member of the (2) is equivalent to the sum of two consecutive octahedral numbers [note 2], then is also valid the relationship:

$$C_n = O_n + O_{n+1} \tag{3}$$

as you can easily verify.

The formula (1) can be obtained from (2) and (3) by substituting the formulas of the sums P and O.

PARTE SECONDA



Il moto dei pianeti intorno al Sole

La rivoluzione copernicana

Nella prima metà del XVI secolo, l'astronomo polacco <u>Niccolò Copernico</u> propose una sua teoria del moto dei pianeti su un sistema di orbite con il Sole al centro, opponendola alla concezione Tolemaica, che voleva invece la Terra al centro del sistema solare. L'idea non era del tutto nuova, già era stata espressa dai greci, ma Copernico ne diede una dimostrazione rigorosa, con procedimenti matematici. Tuttavia la sua teoria non era priva di difetti.

Copernico non sfruttò pienamente la sua idea di un sistema planetario centrato sul sole. Egli conservò, nella sua spiegazione matematica del nuovo sistema, una parte della concezione Tolemaica, per cui, oltre a considerare ancora orbite planetarie circolari, continuò a pensare che i piani orbitali dovessero intersecarsi nel centro dell'orbita terrestre.

Giovanni Keplero perfezionò il sistema matematico di Copernico, applicandovi rigorosamente la sua stessa teoria di un universo dominato dal Sole. Egli, assumendo che i piani delle orbite planetarie dovessero invece intersecarsi nel Sole, riuscì a trasformare il macchinoso sistema di Copernico in una tecnica estremamente semplice e precisa per calcolare la poszione dei pianeti.

Keplero, che aveva lavorato con <u>Tycho Brahe</u>, ebbe in eredità da costui una gran quantità dei più precisi dati mai raccolti sulle posizioni dei pianeti, e con questi si mise a studiare per dare una sistemazione alla teoria copernicana. Fu un lavoro enorme che occupò gran parte del tempo di Keplero per quasi dieci anni.

In una serie di tentativi senza successo, Keplero cercò di calcolare l'orbita del pianeta Marte e l'orbita della Terra, da cui Marte veniva osservato. Per fare questo, egli usò tutta una serie di combinazioni di circoli e figure ovali, ma nessuna di queste riuciva ad eliminare le discordanze fra la sua teoria sperimentale e le osservazioni. Poi, per caso, scoprì che teoria ed osservazioni potevano andare d'accordo se i pianeti si muovevano su orbite ellittiche, con velocità variabili secondo una semplice legge.

Keplero pensò che a spingere i pianeti lungo le loro orbite fosse una forza motrice, l'anima motrix, generata dal Sole, che doveva diminuire col crescere della distanza del pianeta dal Sole: ad una distanza doppia doveva corrispondere una forza dimezzata, e quindi una velocità orbitale inversamente proporzionale alla distanza dal Sole. Questa legge della velocità funzionava bene per piccole eccentricità, quali erano quelle delle orbite planetarie, e nell'approssimazione delle misure astronomiche

all'epoca di Keplero, quando i telescopi non esistevano ancora. Come vedremo, <u>Isaac Newton</u> formulò più tardi la legge esatta: quella della forza inversamente proporzionale al *quadrato* della distanza. (1)

L'impostazione di Keplero introduceva il concetto fisico di moti planetari regolati da forze, contro la concezione tradizionale dei moti "naturalmente" circolari. Occorreva quindi "spiegare" la natura delle forze di Keplero. Furono gli studi successivi svolti a tal fine, a condurre alla concezione newtoniana dell'universo, che diede alla rivoluzione copernicana il suo aspetto definitivo.

La sintesi Newtoniana

Nel 1674 <u>Robert Hooke</u> diede per primo una descrizione qualitativa dei fenomeni che regolano i moti celesti, postulando l'esistenza di due agenti fondamentali: l'*inerzia*, già introdotta da Descartes, che è la proprietà di un corpo di resistere ad una variazione del suo stato di moto, e la *forza di gravità* che è la forza di attrazione reciproca fra corpi qualsiasi.

Newton, che era già pervenuto da solo alla concezione qualitativa di Hooke, riuscì in seguito a risolvere quantitativamente i problema dei moti planetari, deducendo due conseguenze fisiche di estrema importanza. Se le velocità dei pianeti e i raggi delle loro orbite erano legati fra loro dalla terza legge di Keplero, allora l'attrazione che guidava i pianeti vero il Sole doveva diminuire in misura inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separava dal Sole. Inoltre, una legge quadratica di proporzionalità inversa poteva spiegare esattamente, sia le orbite ellitiche della prima legge di Keplero, sia la variazione di velocità descritta nella seconda legge.

Queste deduzioni matematiche, che non avevano precedenti nella storia delle scienze, saranno descritte dettagliatamente nel seguito.

La lezione perduta di Feynman

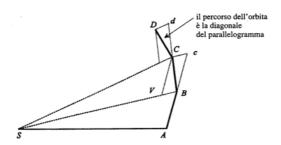
Questo paragrafo è una sintesi (in solo 7 pagine) del contenuto di un intero libro, di circa 200 pagine, su una lezione tenuta nel 1964 da <u>Richard Feynman</u> sull'argomento conclusivo del nostro articolo.

⁽¹⁾ Le due deduzioni quantitative viste in questo paragrafo si spiegano facilmente. Keplero deve aver considerato l'azione del Sole limitatamente al piano orbitale, con l'influenza distribuita uniformemente (per unità di lunghezza) su circonferenze concentrche centrate sul Sole, per cui, raddoppiando il raggio l'azione risulterebbe dimezzata. Newton considera invece un'azione distribuita uniformemente su superfici sferiche concentriche centrate sul Sole: su una sfera di raggio doppio, con superfice quadrupla, l'influenza unitaria si ridurrebbe a un quarto.

Prima di proseguire, ricordiamo le tre leggi fondamentali del moto planetario. Keplero affermava:

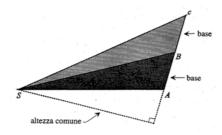
- 1 I pianeti si muovono intorno al Sole lungo orbite ellittiche, con il sole in uno dei fuochi.
- 2 L'area spazzata da un segmento tracciato dal Sole all'orbita è proporzionale al tempo impiegato a percorrerla.
- 3 Pianeti diversi hanno periodi di rivoluzione che stanno ai rispettivi assi maggiori in un rapporto esponenziale pari a 3/2.

Nel suo libro <u>Principia</u>, Newton usò la seconda legge di Keplero per dimostrare che l'uguaglianza delle aree in tempi uguali equivale ad affermare che le forze agenti sui pianeti sono dirette verso il Sole. Newton rappresentò l'orbita con una serie di segmenti di moto inerziale, interrotti da bruschi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del Sole per brevi intervalli di tempo.

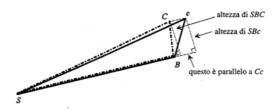


Nel primo intervallo di tempo, il pianeta si muoverebbe da A fino a B, se non ci fosse alcuna forza agente su esso. Nel successivo intervallo di tempo, di uguale durata, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una uguale distanza Bc. Un impulso di forza, applicato nel punto B, genera una componente del moto diretta verso il Sole, BV. Componendo, si ha che il moto effettivo avviene lungo la diagonale BC. La stessa procedura si ripete per ogni punto successivo.

Newton dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. In altre parole, il triangolo *SAB*, spazzato dal pianeta nel primo intervallo di tempo, ha la stessa area del triangolo *SBC*, spazzato nel secondo intervallo e così via.



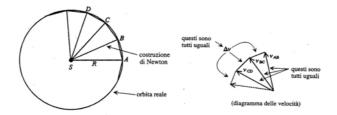
I due triangoli *SAB* e *SBc*, che formano le due aree, sono uguali, perché hanno le basi uguali e l'altezza relativa in comune.



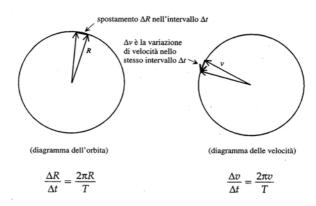
I due triangoli *SBC* e *SBc* hanno una base in comune e altezze uguali, perché giacciono fra rette parallele. Segue l'uguaglianza dei triangoli *SAB* e *SBC*, cioè: *le aree spazzate in tempi uguali sono uguali*.

Applicando la stessa analisi a intervalli di tempo sempre più brevi, si ottiene una traiettoria *ABCD*..., prossima quanto si vuole ad una curva piana, su cui sia l'inerzia che l'attrazione del Sole agiscono con continuità, producendo un moto orbitale in cui le aree spazzate in tempi uguali sono uguali. Questo risultato è stato ottenuto assumendo che le variazioni di velocità, vale a dire le forze, siano dirette verso il sole.

Si dimostra poi facilmente, usando la terza legge di Keplero, che variazioni di velocità (forze) così dirette devono variare come l'inverso del quadrato della distanza. Supponiamo che l'orbita sia semplicemente una circonferenza di raggio *R*. Allora il diagramma di Newton avrebbe questo aspetto:



La figura è un poligono regolare, con lati e angoli uguali fra loro, inscritto in una circonferenza che rappresenta l'orbita reale. A destra abbiamo disegnato il relativo diagramma delle velocità, nel quale le variazioni di velocità Δv risultano formare un poligono regolare simile al precedente, ma ruotato di 90°. Se si prendono intervalli di tempo sempre più brevi, i due diagrammi tendono alla circonferenza, come nelle due figure seguenti:



Essendo la forza F proporzionale a $2\pi v/T$ e la velocità v uguale a $2\pi R/T$, scriviamo:

$$F \sim 2\pi v/T = (2\pi/T) \cdot (2\pi R/T) = 4\pi^2 R/T^2$$

ed essendo, per la terza legge di Keplero: $T \sim R^{3/2}$ e quindi $T^2 \sim (R^{3/2})^2 = R^3$, si ha:

$$F \sim R/T^2 \sim R/R^3 = 1/R^2$$

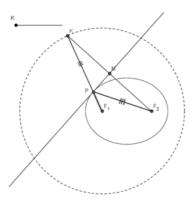
cioè, la forza è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal Sole.

Sappiamo quindi che la forza di gravità esercitata dal Sole su un pianeta è diretta verso il Sole e che la sua intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole. Per determinare ciò, Newton ha fatto uso della seconda e della terza legge di Keplero. Il risultato finale, e il trionfo di Newton, è stato quello di dimostrare che una tale forza di gravità, operante nel rispetto delle sue leggi, conduce a *orbite ellittiche* per tutti i pianeti. Nel seguito dimostreremo questo fatto, mettendo da parte i *Principia* (2), ma seguendo un ragionamento geometrico-dinamico più semplice, dovuto al premio Nobel Richard Feynman.

Prima di proseguire, è utile qui ricordare la definizione geometrica dell'ellisse come: luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi rimane costante.



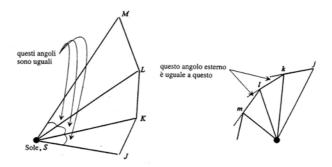
Di importanza centrale, nella dimostrazione di Feynman, è il seguente diagramma animato (che ho trovato su *Wikipedia*) che descrive la <u>costruzione geometrica dell'ellisse</u> col *metodo della tangente*:



⁽²⁾ La dimostrazione di Newton è <u>questa</u> (si tratta della parte conclusiva, da completare con le proposizioni i lemmi ed i corollari citati).

Il contributo di Feynman è consistito essenzialmente, come vedremo, nell'avere individuato, in questa figura, le opportune corrispondenze fra gli elementi geometrici e quelli meccanici del nostro problema.

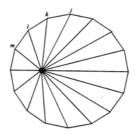
Feynman ridisegna l'orbita con la sequenza dei punti *J, K, L, M, N,* che non corrispondono più a istanti separati da uguali intervalli di tempo, come nel diagramma di Newton, ma piuttosto a uguali angoli di inclinazione rispetto alla posizione di partenza.



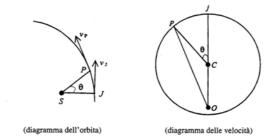
Angoli uguali vogliono dire che le aree dei tiangoli non sono uguali, ma che sono proporzionali al quadrato della distanza dal Sole [presi due triangoli qualsiasi, questi risultano simili (3), per cui le loro aree stanno fra loro come i quadrati delle rispettive dimensioni]. Quindi, dal momento che le aree sono proporzionali ai tempi, i tempi necessari a descrivere questi angoli uguali sono proporzionali al quadrato della distanza. Ora, poichè le variazioni di velocità in tempi uguali risultano inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal Sole, prendendo tempi proporzionali al quadrato della di distanza (angoli uguali) si ottengono variazioni di velocità tutte uguali.

Analogamente a quanto fatto sopra, abbiamo inserito nella figura precedente il diagramma delle velocità, nel quale per costruzione risultano: jk parallelo a KS, kl parallelo a LS, lm parallelo a MS, jk = kl = lm, e gli angoli esterni fra questi ultimi sono uguali. Il diagramma completo delle velocità è un poligono regolare, con l'origine in posizione eccentrica.

⁽³⁾ Questa affermazione è evidentemente vera per una suddivisione in angoli *al Sole* infinitesimi, cioè al limite in cui la traiettoria diventa una curva ed i triangoli sono tutti *isosceli* con angoli corrispondenti uguali.

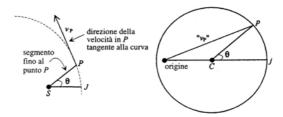


Dividendo l'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, il diagramma delle velocità si avvicina sempre più ad una circonferenza, con l'origine delle velocità in posizione eccentrica. A questo punto Feynman traccia i due diagrammi seguenti:



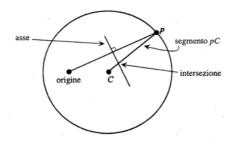
Sul diagramma dell'orbita, le velocità v_j e v_p sono tangenti alla curva nei punti J e P. Il diagramma delle velocità sarà una circonferenza, con l'origine eccentrica. Il punto J sul diagramma di Feynman è anche il punto più vicino al Sole, dove la velocità orbitale ha il valore più elevato. Il segmento che rappresenta v_j deve quindi passare per il centro della circonferenza, perché deve risultare il più lungo nel diagramma delle velocità. La velocità v_p è un segmento dall'origine O parallelo a v_p . Gli angoli JSP e JCP sono uguali a θ , perché i due diagrammi sono divisi nello stesso numero di angoli uguali. Così ad ogni angolo θ conosciamo la direzione della tangente all'orbita che cerchiamo di costruire.

Stabilite così tutte le corrispondenze tra i due diagrammi, Feynman passa alla costruzione dell'orbita, utilizzando il diagramma delle velocità. Per fare questo ruota il diagramma delle velocità di 90°, nel modo seguente:

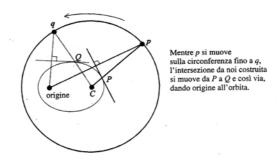


Ora le due orbite, quella a sinistra nella figura e quella da costruire sul diagramma delle velocità, risultano orientate allo stesso modo. In particolare, risultano ugualmente orientate: la direzione del segmento che unisce il Sole al punto P, e la direzione della tangente all'orbita in tale punto.

Per ottenere l'orbita, tracciamo l'asse del segmento Op che risulterà ora parallelo alla velocità v_p , tangente all'orbita nel punto P:



Ma del punto P conosciamo la direzione della retta di appartenenza, cioè la direzione del segmento Cp. Perciò l'intersezione dell'asse tracciato prima con Cp, godrebbe di tutte le proprieta (direzionali) del punto orbitale P in costruzione, per cui:



Ma questa costruzione è proprio quella che abbiamo mostrato nella precedente animazione, cioè la costruzione geometrica dell'ellisse col metodo della tangente. Perciò possiamo affermare di aver realizzato la forma dell'orbita che cercavamo, dimostrando che: la forza di gravità, agente nel rispetto delle leggi di Newton, genera orbite ellittiche per tutti i pianeti.

Origini della dimostrazione di Feynman

La dimostrazione di Feynman non è nuova, essa apparve nel libro Matter and Motion, di James Clerk Maxwell, pubblicato nel 1877. Maxwell attribuì la dimostrazione a Sir William Hamilton, che fu il primo a fare uso del diagramma delle velocità (da lui chiamato odografo) per studiare il moto di un corpo. Leggete le seguenti due pagine estratte dal suddetto libro di Maxwell e giudicate voi stessi.

108

133. KEPLER'S SECOND LAW

Law II.-The orbit of a planet with respect to the sun is an ellipse, the sun being in one of the foci.

Let APQB (fig. 16) be the elliptic orbit. Let S be the sun in one focus, and let H be the other focus.

Produce SP to Uso that SU is equal to the transverse axis AB, and join HU, then HU will proportional and perpendicular to the velocity at P.

For bisect HU in Z and join ZP; ZP will be a tangent to the ellipse at P; let SY be a perpendicular from S on this tangent.

Fig. 16. If v is the velocity at P, and h twice the area swept out in unit of

Also if b is half the conjugate axis of the ellipse

 $SY.HZ = b^2$. HU = 2HZ;Now $\frac{1}{2} \frac{n}{b^2} HU$.

Hence HU is always proportional to the velocity, and it is perpendicular to its direction. Now SU is always equal to AB. Hence the circle whose centre is S and radius AB is the hodograph of the planet, Hbeing the origin of the hodograph.

The corresponding points of the orbit and the hodo-

graph are those which lie in the same straight line through S.

Thus P corresponds to U and Q to V

The velocity communicated to the body during its passage from P to Q is represented by the geometrical difference between the vectors HU and HV, that is, by the line UV, and it is perpendicular to this arc of the circle, and is therefore, as we have already proved, directed towards S

If PQ is the arc described in [a very small] time, then UV represents the acceleration [of velocity in that time;] and since UV is on a circle whose centre is S, UV will be a measure of the angular [movement in that time] of the planet about S. Hence the acceleration is propor-tional to the angular velocity, and this by Art. 129 is inversely as the square of the distance SP. Hence the acceleration of the planet is in the direction of the sun, and is inversely as the square of the distance from the

This, therefore, is the law according to which the attraction of the sun on a planet varies as the planet moves in its orbit and alters its distance from the sun. Vi propongo infine una bellissima lettura, tratta dal testo divulgativo di Voltaire: Eléments de la philosophie de Newton, cap. XX e XXII.

Dimostrazione delle leggi della Gravità ricavate dalle regole di Keplero.

Keplero trovò una regola ammirabile, della quale darò un esempio prima di darne la definizione, per rendere la cosa più agevole.

Giove ha quattro satelliti, che girano intorno ad esso; il più vicino è distante 2 diametri di Giove e 5/6, e fà il suo giro in 42 ore; l'ultimo gira intorno a Giove in 402 ore; si vuol sapere quanto sia distante quest'ultimo satellite dal centro di Giove. Per determinarlo uso questa proporzione: come il quadrato di 42 ore, periodo del primo satellite, sta al quadrato di 402 ore, periodo dell'ultimo satellite, così il cubo di 2 diametri e 5/6 sta ad un quarto termine. Trovato questo quarto termine, se ne estrae la radice cubica, che risulta essere 12 e 2/3, per cui il quarto satellite dista dal centro di Giove 12 diametri e 2/3 di questo pianeta.

Mi servo della stessa regola per tutti i pianeti che girano intorno al Sole. Venere compie il suo giro in 124 giorni, e la Terra in 365; la Terra è lontana dal Sole 30.000.000 di leghe; quante ne sarà lontana Venere? Pertanto dico: come il quadrato dell'anno della Terra, sta al quadrato dell'anno di Venere, così il cubo della distanza media della Terra dal Sole starà ad un quarto termine, la cui radice cubica, che risulta di circa 21.700.000 leghe, è la distanza media di Venere dal Sole. Altrettanto dicasi della Terra, di Saturno, ecc.

La legge pertanto è questa: il quadrato del periodo di un pianeta sta al quadrato dei periodi degli altri pianeti, come il cubo della sua distanza sta al cubo delle distanze degli altri dal centro comune.

Keplero trovò questa proporzione, ma non riuscì a trovarne la ragione. Egli era tanto ammirabile in Astronomia, quanto poco esperto in Filosofia. Nel lib. 4 del suo Compendio dice: "Il Sole ha un anima, non intelligente, ma vegetativa ed attiva; egli, ruotando intorno a se medesimo, attira a se i pianeti, i quali però non cadono in esso, perché essi ruotano ciascuno intorno al proprio asse, presentando al sole ora un emisfero amico, ed ora l'altro emisfero nemico; quello viene attratto e questo respinto, d'onde risulta il percorso annuo dei pianeti su ellissi".

Con questo ragionamento poco filosofico, Keplero concludeva che il Sole dovesse girare intorno al proprio asse. L'errore lo condusse per caso alla verità: egli indovinò la rotazione del Sole quindici anni prima che Galileo lo scoprisse per mezzo del telescopio. Keplero aggiungeva inoltre, nel suo Compendio, che la massa del Sole, la massa di tutto l'Etere e la massa della sfera delle stelle fisse, sono perfettamente uguali.

Non bisogna stupirsi se talvolta si leggono sogni così stravaganti in compagnia di verità così sublimi. Vi sarà taluno, eccellente nei calcoli e nelle osservazioni, il quale alcune volte si serve male della sua ragione. Certi ingegni hanno bisogno di appoggiarsi alla Geometria, e cadono subito se pretendono di camminare da soli. Non

c'è da meravigliarsi quindi che Keplero abbia scoperto quelle leggi dell'Astronomia e ne abbia ignorato le ragioni.

La ragione vera è che la forza centripeta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro del moto, verso cui si dirigono le forze; cioè, la legge di gravità è tale che un corpo, che è tre volte più vicino al centro del suo moto, gravita 9 volte di più; se ne è tre volte più lontano, graviterà 9 volte di meno; e se se ne discosta 100 volte di più, graviterà 10.000 volte meno.

Pertanto, un corpo che si muove circolarmente intorno ad un centro, in ragione inversa del quadrato della distanza da esso, come pure in ragione diretta della sua massa, la gravità lo fa girare intorno al centro, in modo che, senza di essa egli se ne discosterebbe descrivendo una tangente; dunque la gravità opererà piu fortemente su un corpo mobile che gira più veloce intorno al centro, e quanto più lontano il corpo sarà, tanto più lentamente girerà, perché peserà assai meno.

Per questa ragione la Terra, pur essendo 1170 volte più piccola di Giove, gravita nel Sole solo 8 volte meno di Giove; ciò accade per la proporzionalità diretta delle masse ed inversa dei quadrati delle distanze dal Sole.

La legge di Gravità, in ragione inversa del quadrato delle distanze, è dimostrata:

- 1. dall'orbita descritta dalla Luna e dalla sua lontananza dalla Terra che ne è il centro:
 - 2. dalla via che ciascun pianeta percorre intorno al Sole su una ellissi;
- 3. dal confronto delle distanze e delle rivoluzioni di tutti i pianeti intorno al loro centro comune.

Giova osservare che, questa regola di Keplero, che conferma la scoperta di Newton della gravitazione, favorisce altresì il sistema Copernicano. Si può dire che Keplero, con questa sola regola, ha dimostrato ciò che era stato trovato prima di lui, ed ha fatto strada alle verità che un giorno si dovevano scoprire. Si dimostra che, senza la legge delle forze centripete la legge di Keplero sarebbe impossibile. Inoltre, se il Sole girasse intorno alla Terra, si avrebbe che: come la rivoluzione della Luna intorno alla Terra nel corso di un mese, sta alla rivoluzione del Sole intorno alla Terra, nel corso di un anno, così la radice quadrata del cubo della distanza della Luna dalla Terra, sta alla radice quadrata del cubo della distanza del Sole dalla Terra. Con questo calcolo si avrebbe che il Sole non dista da noi più di 510.000 leghe, quando si sa che è lontano almeno 30.000.000 di leghe.

Dalla stessa regola, con analogo ragionamento, si otterrebbe che: se la Terra fosse il centro del moto del Sole, come lo è del moto della Luna, la rivoluzione del Sole avverrebbe in 475 anni. Infatti, essendo la distanza media del Sole dalla Terra, 337 volte la distanza media della Luna dalla Terra, si avrebbe che: il cubo di 1 sta al cubo di 337, come il quadrato di 28, che è la rivoluzione periodica della Luna, starà ad un quarto numero; per cui si troverebbe che il Sole, invece di un anno, impiegherebbe 475 anni per girare intorno alla Terra.

Dalle leggi di Keplero e di Newton, resta dunque provato che, ogni pianeta gravita verso il Sole, centro delle orbite che essi descrivono. Queste leggi valgono per i satelliti di Giove rispetto a Giove, che ne è il centro, per le lune di Saturno rispetto a Saturno, e per la nostra Luna rispetto a noi. Tutti questi pianeti secondari, che girano

intorno al loro pianeta centrale, gravitano altresì, con esso, verso il Sole; così la Luna, trascinata attorno alla Terra dalla forza centripeta, viene allo stesso tempo attratta dal Sole, intorno al quale pure essa fà la sua rivoluzione. Non vi sono variazioni, lungo il percorso della Luna, sia nelle distanze dalla Terra, sia nella forma della sua orbita, che imita ora l'ellisse, ora il cerchio, che non siano dovute alla gravitazione, in ragione dei cambiamenti della sua distanza dalla Terra e della sua distanza dal Sole.

La Luna non percorre esattamente, nella sua orbita, aree uguali in tempi uguali. Newton ha calcolato tutti i casi in cui si incontra questa ineguaglianza: tutti dipendono dall'attrazione del Sole. Il Sole attrae questi due corpi in ragione diretta delle loro masse ed inversa del quadrato delle loro distanze, con l'effetto di queste due forze combinate insieme.

Nuove prove e nuovi effetti della gravitazione: essa è una forza che risiede in ciascuna parte della materia. Scoperte che dipendono da questo principio.

La gravitazione è la causa prima del moto dei pianeti, della caduta di tutti i corpi e del peso che sentiamo in essi. Questa forza di attrazione non è, né può essere, la semplice capacità che ha un corpo di chiamarne a sè un altro: noi la consideriamo come una forza dalla quale risulta il moto intorno ad un centro; essa fà che il Sole graviti verso il centro dei pianeti, come i pianeti gravitano verso il Sole, e che la Luna attragga la Terra, come la Terra attrae la Luna.

Una dimostrazione di questa verità, risiede in una delle leggi primarie del moto. Questa legge dice che la reazione è uguale all'azione, per cui, se il Sole gravita sui pianeti, questi gravitano su di esso; vedremo nel seguito come si attua questa legge.

Poiché la gravitazione opera necessariamente in ragione diretta della massa, ed essendo il Sole circa 760 volte più grande di tutti i pianeti messi insieme (senza contare i satelliti di Giove, l'anello e le lune di Saturno) bisogna che il Sole sia il centro della loro gravitazione, e che perciò tutti i pianeti girino intorno ad esso.

Osserviamo che, quando diciamo che la forza di gravità opera in ragione diretta delle masse, vogliamo significare che essa opera sopra un corpo tanto più, quanto questo ha più parti; lo abbiamo dimostrato facendo vedere che, nella macchina pneumatica, estrattane l'aria, una pagliuzza cade con uguale celerità di una libbra d'oro. Abbiamo detto (trascurando la resistenza dell'aria) che una palla di piombo discende sulla Terra di 15 piedi in un secondo, ed abbiamo dimostrato che la stessa palla, se fosse distante dalla Terra 60 semidiametri terrestri, come lo è la Luna, discenderebbe di 15 piedi in un minuto. Quindi, la forza della Terra sulla Luna sta alla forza che avrebbe su una palla di piombo posta all'altezza della Luna, come la massa solida della Luna sta alla massa della stessa palla. Il Sole opera in questa stessa proporzione su tutti i pianeti: egli attrae Giove, Saturno e i loro satelliti, in ragione diretta della massa solida di Giove, di Saturno e dei loro satelliti.

Quindi, la gravitazione non è solo nella massa totale di ciascun pianeta, ma anche in ciascuna parte di quella massa, perciò: ogni atomo di materia è dotato di questa proprietà.

Esporrò la maniera più semplice con cui Newton ha dimostrato che la gravità risiede ugualmente in ogni atomo. Se tutte le parti di un corpo non avessero ugualmente questa proprietà, ve ne sarebbero alcune più deboli ed altre più forti; un pianeta, ruotando intorno al proprio asse, presenterebbe a distanza uguale ora le parti più deboli ed ora le più forti, per cui i corpi medesimi, in tutte le occasioni possibili, avrebbero ad una stessa distanza, ora un grado di gravitazione, ora un altro; così, la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze, come pure la legge di Keplero, verrebbero continuamente trasgredite; poiché ciò non accade, possiamo dire che nei pianeti non c'è parte alcuna che graviti meno di un altra.

Eccovi un'altra dimostrazione. Se questa proprietà fosse differente in certi corpi, nella macchina pneumatica alcuni corpi cadrebbero più lentamente o più velocemente di altri; ora, tutti i corpi vi cadono nel medesimo tempo, tutti i pendoli di uguale lunghezza fanno nell'aria le loro oscillazioni in tempi uguali, siano essi d'oro, d'agento, di ferro, di acero o di vetro; dunque, tutti i corpi gravitano nel medesimo grado secondo le loro masse, in maniera che la gravitazione operi come 100 su 100 atomi e come 10 su 10 atomi.

Andando di verità in verità, si giunge gradualmente a conclusioni che non sembravano alla portata dello spirito umano.

Newton, con le sole leggi della gravitazione, ha calcolato il peso dei corpi celesti, ed ha previsto quanto un corpo, che quaggiù pesa una libbra, debba pesare sulla Luna, o su Saturno.

E' cosa facile conoscere la grandezza di un corpo celeste quando se ne conosca il diametro, ma nota questa, non per questo se ne conosce la massa, cioè la quantità di materia in esso contenuta, cosa che non si può sapere con altro mezzo che non sia la meravigliosa scoperta delle leggi della gravitazione.

- 1. Quando si dice *densità*, ovvero *quantità di materia*, in un corpo, si suppone che la materia del corpo sia omogenea, cioè che ogni piede cubico della suddetta materia sia ugualmente pesante.
- 2. Ogni corpo attrae in ragione diretta della sua massa, perciò, in circostanze uguali, un corpo che abbia 10 volte più massa, attrarrà 10 volte più di quanto, a distanza uguale, attragga un corpo 10 volte meno massiccio.
- 3. Bisogna tener conto della grandezza, ossia la circonferenza del corpo celeste, perché tanto essa è maggiore, tanto cresce la distanza dal centro, e l'attrazione è in ragione inversa del quadrato di questa distanza. Per esempio, se il diametro del pianeta A è quattro volte maggiore del diametro del pianeta B, ed entrambi hanno ugual quantità di materia, il pianeta A attrarrà sedici volte meno un corpo posto sulla sua superficie, di quanto lo attrarrebbe il pianeta B, e se il corpo pesasse una libbra sul pianeta A, ne peserebbe sedici sul pianeta B.
- 4. Si deve sapere in quanto tempo i satelliti di un corpo celeste, del quale si voglia conoscere la densità, facciano il loro giro di rivoluzione intorno al esso; poiché, come abbiamo visto, ogni corpo che gira intorno ad un altro, tanto più gravita, quanto più

velocemente gira; ora, egli non gravita di più se non per una di queste due ragioni: o perché è più vicino al centro, o perché questo centro che lo attrae contiene più materia. Se pertanto si vuole conoscere la densità del Sole, rispetto alla densità della Terra, bisogna confrontare il tempo periodico di un pianeta come Venere, intorno al Sole, con il periodo della Luna intorno alla Terra, e la distanza di Venere dal Sole, con la distanza della Luna dalla Terra.

5. Ecco il procedimento: la quantità di materia nel Sole sta alla quantità di materia nella Terra, come il cubo della distanza di Venere dal centro del Sole, sta al cubo della distanza della Luna dal centro della Terra (supponendo che la distanza di Venere dal Sole sia 257 volte maggiore della distanza della Luna dalla Terra); ed ancora in ragione reciproca del quadrato del tempo periodico di Venere intorno al Sole, al quadrato del tempo periodico della Luna intorno alla Terra. Fatta questa operazione, supposto che la grandezza del Sole stia a quella della Terra, come 1.000.000 sta a 1, si troverà che il Sole, pur essendo 1.000.000 di volte più grande della Terra, non ha che circa 250.000 volte più materia.

Inoltre, se volessi sapere in quale ragione sia la forza di gravità sulla superficie del Sole, alla forza di gravità sulla superficie della Terra, cioè a dire quanto pesi sul Sole un corpo che quaggiù pesa una libbra, dovrei dire: queste forze dipendono dalla densità dei corpi celesti e dalla distanza dal centro di essi dei corpi che vi pesano sopra, cioè dai semidiametri del Sole e della Terra; il semidiametro terrestre sta a quello solare come 1 a 100, e la densità della Terra sta a quella del Sole come 4 a 1; dico dunque: come 100, semidiametro del Sole moltiplicato per l'unità, sta a 4, densità della Terra moltiplicata per l'unità, così il peso dei corpi sulla superficie del Sole sta al peso degli stessi corpi sulla superficie della Terra; la ragione di 100 a 4, ridotta ai minimi termini è come 25 a 1, dunque, un corpo che da noi pesa una libbra, sulla superficie del Sole peserebbe 25 libbre.

Non possiamo fare le medesime ricerche per quei pianeti che non hanno lune o satelliti con cui confrontarli; perciò ignoriamo i rapporti di gravitazione tra Mercurio, Marte, Venere e noi, mentre conosciamo i rapporti con gli altri pianeti.

I - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

Questo articolo è una sintesi tratta dal primo paragrafo del saggio: Relatività: Esposizione divulgativa di A. Einstein. Si tratta in pratica di una trascrizione delle sottolineature sul testo, da me usate per fissarne i concetti, insieme ad un paio di derivazioni matematiche tratte dai miei appunti scolastici, e poche altre considerazioni.

1. Il significato fisico delle proposizioni geometriche

La geometria di Euclide prende l'avvio da alcuni concetti fondamentali, come *piano*, *punto*, *retta*, e da alcune proposizioni semplici (*assiomi*). Le proposizioni vengono poi ricondotte a questi assiomi, cioè vengono dimostrate. Una proposizione risulterà dunque corretta (*vera*) quando è stata derivata dagli assiomi.

Ai concetti geometrici corrispondono più o meno esattamente degli oggetti in natura, e questi ultimi costituiscono senza dubbio la causa esclusiva della genesi di quei concetti. La geometria può prescindere da ciò, al fine di dare al proprio edificio la maggiore unità logica possibile.

Se aggiungiamo alle proposizioni della geometria euclidea l'unica proposizione che a due punti su un corpo praticamente rigido corrisponde sempre la stessa *distanza*, indipendentemente dai mutamenti di posizione che possiamo imprimere al corpo, allora la geometria a cui sia stata fatta quest'aggiunta può essere trattata come un ramo della fisica. Per il momento ammetteremo la *verità* delle

proposizioni geometriche; nella *Teoria della relatività generale* questa verità è limitata.

2. Il sistema delle coordinate

In base all'interpretazione fisica di distanza, siamo in grado di stabilire, per mezzo di misurazioni, la distanza fra due punti situati su un corpo rigido. Ci occorre a questo scopo un *intervallo* (regolo S) come campione unitario.

Ogni descrizione spaziale del luogo di un evento o di quello di un oggetto viene compiuta specificando su un corpo rigido (corpo di riferimento) il punto con il quale coincide quel dato evento od oggetto.

Usando il sistema delle coordinate cartesiane, il luogo di un evento qualsiasi sarà determinato dalla specificazione delle lunghezze delle tre coordinate (x, y, z), determinate mediante regoli-campione con manipolazioni compiute secondo i metodi prescritti dalla geometria euclidea.

3. Spazio e tempo nella meccanica classica

Lo scopo della meccanica è di descrivere in qual modo i corpi mutano col *tempo* la loro posizione nello *spazio*.

Io sto al finestrino di un vagone ferroviario che viaggia con velocità uniforme, e lascio cadere una pietra sulla banchina. Prescindendo dalla resistenza dell'aria, vedo discendere la pietra in linea retta. Un pedone, che osserva il fatto dalla banchina, vede che la pietra cade a terra descrivendo un arco di parabola. Se in luogo dell'espressione corpo di riferimento introduciamo il concetto, utile per la descrizione matematica, di sistema di coordinate, siamo in grado di dire: la pietra percorre una linea retta relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al vagone mentre descrive una parabola relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al terreno

(banchina). Non esiste una traiettoria in sé, ma soltanto una traiettoria rispetto a un particolare corpo di riferimento.

Per ottenere una descrizione completa del movimento, dobbiamo specificare in che modo il corpo altera la propria posizione col *tempo*. Bisognera dare una definizione di tempo tale che, i valori del tempo risultino grandezze osservabili (*risultati di misurazioni*). Immaginiamo due orologi identici in mano agli osservatori. Ciascuno di essi determinerà in quale precisa posizione del rispettivo corpo di riferimento si trova la pietra a ogni tic del proprio orologio.

4. Il sistema di coordinate galileiano

Il principio di inerzia della meccanica di Galileo-Newton, si enuncia: un corpo permane in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Un sistema di coordinate il cui stato di moto sia tale che il principio di inerzia risulti valido con riferimento a esso, viene detto sistema di coordinate galileiano. Le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide soltanto per un sistema di coordinate galileiano.

5. Il principio di relatività (nel senso ristretto)

Se K è un sistema di coordinate galileiano, allora è pure galileiano ogni altro sistema di coordinate K che si trovi, rispetto a K, in uno stato di moto traslatorio uniforme. Rispetto a K le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide esattamente come lo sono rispetto a K.

Estendendo diremo che i *fenomeni naturali* si svolgono rispetto a *K'* secondo le stesse precise regole generali come rispetto a *K*. Questo enunciato viene detto *Principio di relatività* (nel senso ristretto).

Di fronte però al piú recente sviluppo dell'*elettrodinamica* e dell'*ottica*, risultò che la meccanica classica offre una base *insufficiente* per la descrizione fisica di tutti i fenomeni naturali. A

questo punto il problema della validità del principio di relatività fu posto in discussione.

Fra tutti i sistemi di coordinate galileiani possibili, se ne scelga come corpo di riferimento uno ben determinato (K_o) che chiamiamo assolutamente in quiete, e chiamiamo in moto tutti gli altri sistemi galileiani K. Sia la banchina del nostro esempio il sistema K_o , e il vagone ferroviario un sistema K, con delle leggi meno semplici di quelle valide rispetto a K_o , per il fatto che K risulta in moto rispetto a K_o .

6. Il teorema di addizione per le velocità secondo la meccanica classica

Supponiamo che il vagone ferroviario viaggi sulle rotaie con una velocità costante v, e che una persona cammini entro tale vagone nella direzione di marcia con una velocità w. Con quale velocità W la persona avanza rispetto alla banchina?

Si ha che W = v + w rispetto alla banchina. Vedremo che questo risultato, il quale esprime il *teorema di addizione per le velocità* secondo la meccanica classica, non è valido nella realtà.

7. L'apparente incompatibilità fra la legge di propagazione della luce e il principio di relatività

La propagazione della luce in uno spazio vuoto ha luogo in linea retta con una velocità c=300000 chilometri al secondo. Questa velocità non dipende dalla velocità del moto del corpo che emette la luce. Questa è la legge della costanza della velocità c della luce (nel vuoto).

Come sistema di riferimento scegliamo ancora una volta la nostra banchina ferroviaria. Viene lanciato un raggio di luce la cui estremità avanza con velocità c rispetto alla banchina. Il nostro vagone viaggi lungo le rotaie con velocità v, nella stessa direzione e verso del raggio

di luce. La velocità di propagazione del raggio di luce relativamente al vagone sarà: w = c - v, inferiore a c.

Questo risultato è in conflitto col principio di relatività: la legge di propagazione della luce nel vuoto deve essere uguale tanto per il vagone ferroviario quanto per le rotaie.

Per uscire da questa contraddizione bisognerebbe abbandonare o il principio di relatività o la legge di propagazione della luce nel vuoto. Ma lo sviluppo della fisica teorica ha dimostrato che le esperienze conducono in modo inequivocabile a una teoria dei fenomeni elettromagnetici che ha per conseguenza necessaria la legge della costanza della velocità della luce nel vuoto.

A questo punto entra in campo la *Teoria della relatività ristretta*, che, analizzando i concetti fisici di tempo e di spazio, evidenzia che nella realtà non esiste la minima incompatibilità fra il principio di relatività e la legge di propagazione della luce.

8. Sul concetto di tempo nella fisica

Un fulmine ha colpito simultaneamente le rotaie della nostra linea ferroviaria in due punti A e B.

Per verificare la simultaneità, verrà messo un osservatore nel punto di mezzo M dell'intervallo AB, con due specchi inclinati a 90 gradi. Se l'osservatore percepisce i due bagliori del fulmine nel medesimo istante, essi saranno allora simultanei.

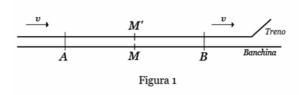
La definizione sarebbe corretta, se la luce viaggia lungo l'intervallo *AM* con la stessa velocità con cui viaggia lungo l'intervallo *BM*. Una verifica di quest'ipotesi sarebbe possibile se avessimo a nostra disposizione i mezzi per misurare il tempo

Per una definizione di *tempo* nella fisica, supponiamo che orologi di costruzione identica vengano collocati nei punti *A*, *B* e *C* della linea ferroviaria (sistema di coordinate), e vengano regolati in modo che le loro lancette abbiano *simultaneamente* le medesime posizioni. In queste condizioni intendiamo per tempo di un evento la lettura (posi-

zione delle lancette) di quello fra tali orologi che si trova nell'immediata vicinanza (spaziale) dell'evento in esame.

9. La relatività della simultaneità

Un treno molto lungo viaggi sulle rotaie con la velocità costante v e nella direzione indicata dalla figura 1.



Due eventi (per esempio i due colpi di fulmine *A* e *B*) che sono simultanei rispetto alla banchina ferroviaria saranno tali anche rispetto al treno?

Sia M' il punto medio dell'intervallo AB sul treno in moto. Quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto M' coincide con il punto M, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità v del treno. L'osservatore in M' vedrà il raggio di luce emesso da B prima di vedere quello emesso da A. Risultato: gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (relatività della simultaneità); ogni sistema di coordinate ha il suo proprio tempo particolare

10. Sulla relatività del concetto di distanza spaziale

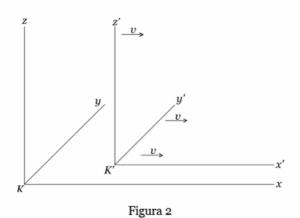
Consideriamo due punti A' e B' sul treno che viaggia lungo la banchina con la velocità v. Determiniamo i punti A e B della banchina accanto ai quali passano i due punti A' e B' in un particolare istante t,

giudicato dalla banchina. Se la persona che si trova sul vagone percorre in un'unità di tempo, misurata dal treno, l'intervallo A'B', non è detto che l'intervallo AB, misurato dalla banchina, risulti uguale ad A'B'.

11. La trasformazione di Lorentz

I risultati degli ultimi due paragrafi mostrano che i concetti fisici di simultaneità e di distanza spaziale sono relativi, cioè dipendono dalle condizioni di moto del sistema a cui si riferiscono, contro le ipotesi della meccanica classica considerate.

L'apparente disaccordo incontrato al paragrafo 7, fra la legge di propagazione della luce ed il principio di relatività galileiano, viene risolto determinando l'entità esatta delle variazioni spazio-temporali di un evento, nel passaggio dal sistema di coordinate x, y, z, t (della banchina) al sistema x', y', z', t' (del treno).



Quando i sistemi di coordinate son orientati nello spazio come indicato nella figura 2, tale problema viene risolto mediante le equazioni seguenti:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questo sistema di equazioni è noto col nome di *Trasformazione di Lorentz*.

La trasformazione di Galileo si ricava dalla trasformazione di Lorentz ponendo in quest'ultima un valore infinitamente grande in luogo della velocità c della luce.

Supponiamo ora che un segnale luminoso venga lanciato lungo l'asse positivo x, e che l'eccitazione luminosa si propaghi secondo l'equazione x=ct, cioè con la velocità c. Se sostituiamo a x il valore ct nella prima e nella quarta equazione della trasformazione di Lorentz, otteniamo:

$$x' = ct'$$
.

Questa è l'equazione cui soddisfa la propagazione della luce, riferita al sistema K'. Vediamo così che la velocità di trasmissione rispetto al corpo di riferimento K' risulta anch'essa uguale a c.

Non dobbiamo stupirci di ciò, giacché le equazioni della trasformazione di Lorentz sono proprio state derivate in conformità a questo punto di vista.

Può sembrare che il maggior merito nello sviluppo della teoria della relatività ristretta debba essere attribuito a Lorentz, invece che ad Einstein, ma non è così. E' vero che Lorentz fu il primo ad introdurre in elettrodinamica il fattore matematico

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

secondo cui, in teoria della relatività, i regoli si contraggono ed i tempi si dilatano, ma va esclusivamente ad Einstein il grande merito dell'aver combinato la trasformazione di Lorentz con il principio di relatività in una teoria che è risultata poi di grande aiuto euristico nella ricerca delle leggi generali della natura.

12. Risultati della teoria

La teoria della relatività ristretta impone quindi un riesame delle leggi della fisica. Si accetteranno le leggi fisiche che risultino identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

In dinamica relativistica cerchiamo una definizione della quantità di moto che sia invariante per trasformazioni di Lorentz. La definizione newtoniana: $p = m_o v$, dove m_o è la massa a riposo, va riformulata come segue:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m_0 c \beta \gamma \qquad (\beta = v / c; \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}})$$

Consideriamo il quadrato di *p*:

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2 \tag{1}$$

per v=o (riposo), si ha l'identità:

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1 \qquad cio\dot{e} \qquad \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

moltiplicando per $m_0^2 c^4$, si ha:

$$m_o^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_o^2 c^4$$

cioè, per la (1):

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \tag{2}$$

Poichè la massa a riposo è costante, la grandezza m_0^2 c^4 risulta variante per trasformazioni di Lorentz.

Se definiamo l'energia totale relativistica:

$$E = m_0 c^2 \gamma$$

otteniamo dalla (2):

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 (3)$$

che quindi risulta invariante per trasformazioni di Lorentz.

La massa relativistica m si relaziona con la massa a riposo m_o , ramite il fattore di Lorentz:

$$m = \gamma m_0$$

per cui, se v=o (riposo), p=o, m ed m_o coincidono e la (3) si scrive, on la massa relativistica m:

$E = m c^2$

Lo stesso Einstein spiegava così questa formula: "Dalla teoria della elatività si ricava che massa ed energia sono entrambe differenti manifestazioni della stessa cosa, un concetto non di immediata comprensione per l'uomo della strada. Inoltre, l'equazione E uguale a m moltiplicato per c elevata al quadrato, che significa che l'energia è uguale alla massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce, mostra che piccolissime quantità di massa possono essere trasformate in una immensa quantità di energia e viceversa. La massa e l'energia sono infatti equivalenti, secondo la formula appena citata. Questo è stato dimostrato da Cockroft e Walton nel 1932 in un esperimento".

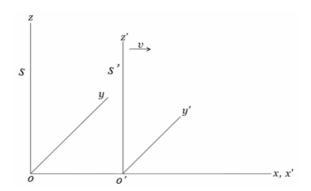
Anche qui sorgono dubbi sulla paternità di questa importante scoperta. Altri studiosi avevano già messo in relazione la massa e l'energia. La formula $E = mc^2$ era stata avanzata da Poincaré nel 1900, senza una dimostrazione. Tolver Preston, basandosi sulla stessa equazione, aveva previsto, molti anni prima, l'energia atomica e la super-conduttività. Infine, un agronomo italiano, De Pretto, aveva pubblicato la formula, due anni prima. Tuttavia, Einstein fu il primo a presentare seriamente questo risultato, come parte di una teoria più grande, derivandolo dalla sua Teoria della Relatività.

La mia opinione personale è che la formula più famosa della scienza, già intuita da diversi ricercatori in quegli anni che sconvolsero la fisica, sia stata tempestivamente adattata da Einstein alla sua nascente Teoria della Relatività (avendo egli intuito che da essa derivava) con un procedimento di dimostrazione eseguito a ritroso, attraverso sapienti manipolazioni delle grandezze fisiche coinvolte.

APPENDICE

13. Derivazione della Trasformazione di Lorentz

Cerchiamo una traformazione per cui la velocità della luce $\,c\,$ risulti indipendente dal moto dell'osservatore.



Una sorgente luminosa, ferma nell'origine O di S, emette un impulso di luce al tempo t=o. Il fronte d'onda sferico raggiungerà il punto P(x,y,z) al tempo $t=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}/c$ per cui, in S, l'equazione del fronte d'onda sferico è:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 (1)$$

Al tempo t=o, le origini O ed O' concidano, e sia anche t'=o. Allora, per un osservatore in S', l'equazione del fronte d'onda sarà:

$$\chi'^{2} + \chi'^{2} + Z'^{2} = c^{2}t'^{2} \tag{2}$$

Nel sistema S', in moto come in figura, per la trasformazione di Galileo, si hanno:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$
 (3)

che sostituite nella (2) danno:

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$
 (4)

che è in disaccordo con la (1).

Perchè sia valido il principio della costanza di c, deve esistere una trasformazione che si riduca a quella di Galileo per v/c tendente a zero e che trasformi esattamente la (2) nella (1).

La trasformazione del tempo t' = t deve essere modificata, per eliminare i termini indesiderati - $2xvt + v^2t^2$.

Proviamo con la trasformazione:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t + fx$$
 (5)

dove f è una costante da determinare. Allora la (2) diventa:

$$x^{2} - 2xvt + v^{2}t^{2} + y^{2} + z^{2} = c^{2}t^{2} + 2c^{2}ftx + c^{2}f^{2}x^{2}$$
 (6)

Osserviamo che i termini con xt si elidono se si pone:

$$f = -v/c^2$$

Con questo valore di f, la (6) diventa:

$$x^{2}(1-v^{2}/c^{2})+y^{2}+z^{2}=c^{2}t^{2}(1-v^{2}/c^{2})$$

che può essere ricondotta alla (1), eliminando il fattore di scala indesiderato $(1 - v^2/c^2)$. Ciò si ottiene modificando la trasformazione di prova (5) nel modo seguente:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questa è la Trasformazione di Lorentz che si cercava. Essa si riduce a quella di Galileo per v/c tendente a o, e sostituita nella (2) dà:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

esattamente come richiesto.

11 - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' GENERALE

In questa seconda parte, che tratta l'argomento più complesso della Relatività Generale, il testo guida di Einstein, usato nella prima parte, è stato abbandonato. Mi è servito solo per costruire la scaletta dei vari argomenti, che ho approfondito invece, con una ricerca più estesa, consultando alcuni appunti e testi della mia biblioteca personale ed alcuni articoli rinvenuti sulla rete.

Einstein riteneva che la sua teoria della relatività ristretta, limitata cioè ai sistemi inerziali, potesse essere estesa (generalizzata) includendovi i sistemi non inerziali. Egli pensava cioè, che tutti i di riferimento dovessero essere equivalenti formulazione delle leggi fisiche. Per realizzare la Teoria della relatività generale, egli formulò (1908) il Principio di equivalenza, secondo il quale non è possibile distinguere fra i fenomeni che si osservano in un campo gravitazionale uniforme, e quelli che si osservano in un sistema che si muove con accelerazione costante. La relatività ristretta elimina l'incongruenza fra la meccanica classica e l'elettromagnetismo, ma crea una nuova contraddizione, questa volta con la teoria della gravitazione di Newton, che è compatibile con il principio di relatività Galileiano, ma non lo è con il principio di relatività ristretta. La legge di Newton non è invariante per trasformazioni si Lorentz. Per risolvere il problema, occorre formulare una nuova teoria, che risulterà in sostanza una nuova descrizione (relativistica) del campo gravitazionale. Un forte impulso allo sviluppo di una tale teoria, lo ha dato lo stesso Einstein enunciando il suo principio di equivalenza.

1. Massa inerziale e massa gravitazionale

Galileo, nel suo famoso esperimento sulla caduta dei gravi, dimostrò che la gravità è indipendente dalla massa. Nell'equazione del moto:

$$F = m_i a$$

entra in gioco la massa $inerziale m_i$ di un corpo in moto accelerato. La legge di Newton:

$$F = G \frac{M \, m_g}{r^2}$$

considera invece la massa gravitazionale m_g di un corpo in caduta libera.

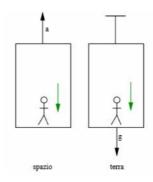
Si ha:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{GM}{r^2} \frac{m_g}{m_i} = g$$
 (accelerazione di gravità)

cioè, l'equivalenza $m_i = m_g$ osservata da Galileo (1), implica che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalle proprietà del corpo, cioè: g è una proprietà della Terra, per cui tutti i corpi vi cadono con la stessa accelerazione di gravità.

(1) Mi piace pensare a questo esperimento considerando il paradosso seguente. L'inerzia è la proprietà della massa di resistere al moto. Per effetto di questa proprietà, presa singolarmente, dei due corpi in caduta, quello più pesante viaggerebbe più lentamente, contro il senso comune.

Einstein spiega, con un *esperimento mentale*, che è impossibile determinare il proprio stato di moto stando all'interno di una stanza chiusa.



L'osservatore, a causa dell'equivalenza tra m_i ed m_g , non ha modo di distinguere se la forza che lo attrae verso il pavimento sia dovuta alla gravità o ad un'accelerazione verso l'alto di pari intensità. Se la stanza è in caduta libera, la gravità vi si annulla, e l'osservatore non è in grado di capire se si trova in una zona dell'universo senza campo gravitazionale o se invece cade verso un pianeta.

Vediamo come funziona il principio di equivalenza nello sviluppo della teoria della relatività generale.

La possibilità di ottenere un riferimento inerziale (la stanza in caduta libera), per l'uguaglianza $m_i = m_g$, suggerisce ad Einstein l'idea di un laboratorio in cui studiare il moto di una massa inerziale m_i , applicandovi i principi della dinamica classica e le trasformazioni della relatività ristretta. Si ottiene così una descrizione equivalente a quella che si avrebbe considerando l'aspetto gravitazionale della massa, m_g , considerata come immersa in un campo gravitazionale, in cui il moto studiato seguirebbe invece le leggi della gravitazione universale. Ma Einstein dovrà considerare il suo laboratorio come infinitamente piccolo, situato nell'intorno infinitesimo di un punto dello spazio in esame, cioè nell'approssimazione locale in cui è lecito adoperare la meccanica classica e le trasformazioni di Lorentz.

Entra così in gioco lo spazio infinitamente piccolo, che si studia con la geometria differenziale, che qui dovrà essere *quadridimensionale*, essendovi coinvolte le trasformazioni di Lorentz dello spazio-tempo.

In una tale geometria, di tipo *riemanniano* (n-dimensionale), sono coinvolte entità matematiche, dette *tensori*, che descrivono in maniera molto efficace le proprietà dello spazio. Fra questi, di particolare interesse è il cosiddetto *tensore metrico*, che governa tutta la geometria dello spazio, definendovi le nozioni operative di *distanza*, angolo, lunghezza di una curva, geodetica, curvatura.

I risultati di un tale studio, estesi ai punti vicini attraverso le trasformazioni di Lorentz, copriranno tutto lo spazio, e ne risulterà una descrizione dello spazio stesso, e quindi la descrizione del campo che lo ha generato. Il risultato finale sono le *Equazioni del campo*, che descrivono il campo gravitazionale attraverso la geometria dello spazio-tempo curvo che esso genera, descritta da alcuni *tensori speciali* che vedremo in seguito.

C'è da sottolineare che la curvatura dello spazio-tempo non è solo spaziale: tutte e quattro le dimensioni sono *piegate*, inclusa quella temporale (non potrebbe essere altrimenti, visto che spazio e tempo sono *mescolati* insieme, per definizione).

2. Sistemi localmente inerziali

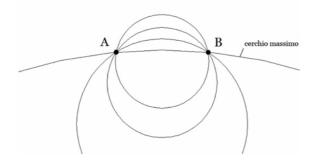
Un sistema solidale con la superficie terrestre, non è inerziale. In un sistema inerziale non c'è la gravità (che consente di provare la rotazione della Terra con il pendolo di Foucault). Se la stanza dell'esperimento è in caduta libera, la gravità si annulla, e la stanza può essere considerata un sistema inerziale. Ciò non è possibile per una stanza di dimensioni paragonabili alla Terra, perchè la gravità vi sarebbe rivelata dalla sua variazione in punti diversi. Perciò prenderemo in esame sistemi localmente inerziali, in cui l'inerzialità è valida solo nell'intorno infinitesimo di un punto.

L'effetto di immettere un campo gravitazionale nello spazio è quello di frantumare il sistema di riferimento inerziale in un'infinità di sistemi di riferimento inerziali locali distinti l'uno dall'altro. Lo scopo della relatività generale è quello di descrivere (relativisticamente) il campo gravitazionale, e ciò (per la definizione stessa del concetto di campo) equivale a dare le leggi della variazione (continua) del campo gravitazionale. Nel passaggio da un punto all'altro, lo spazio verrà ricoperto con sistemi inerziali locali (1), legati l'uno all'altro da opportune trasformazioni che, a differenza di quelle di Lorentz, risulteranno essere ora non lineari.

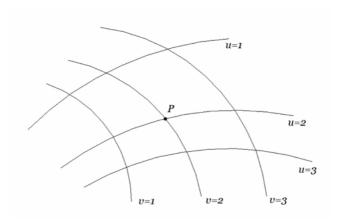
(1) Questo è come il comune processo di *mappatura* usato dai cartografi, ricoprendo l'intera superficie *sferica* terrestre con le *carte locali*, realzzate con i metodi di misurazione della *geometria piana*.

3. Le geometrie non-euclidee.

Per oltre due millenni, la geometria dominante è stata quella di Euclide, costruita su alcuni postulati, fra cui quello della retta, come percorso minimo fra due punti, e quello delle rette parallele. Solo nel diciannovesimo secolo si è visto, per opera di matematici quali: Gauss, Lobacevskij, Riemann, che, se si abbandonava il postulato delle rette parallele, si potevano costruire nuove geometrie (non-euclidee) in cui il concetto di retta veniva sostituito con quello metrico di *curva geodetica*, ossia il percorso di minor distanza fra due punti. Tale percorso minimo si misura sempre e solo sulle geodetiche, come si vede nella geometria sferica di Gauss, in cui le geodetiche (che qui svolgono il ruolo delle rette ed hanno sempre un punto in comune) sono i cerchi massimi della superficie sferica, cioè quelli a curvatura minima, come si vede nella figura seguente:



In queste nuove geometrie, tuttavia, avendo abbandonato il concetto di parallelismo, che era alla base del sistema cartesiano delle coordinate, sarà necessario introdurre nuove coordinate per descrivere la posizione spaziale dei punti. Un esempio di queste sono le coordinate gaussiane (Nord e Est) che si trovano in cartografia, che è la geometria sferica che descrive la superficie terrestre. Un sistema di coordinate gaussiane si costruisce nel seguente modo:



Si immagini di tracciare su una superficie curva un sistema arbitrario di curve u, designate: u=1, u=2, u=3,... Fra le curve u=1 e u=2, si immaginino tracciate le infinite curve che corrispondono a tutti i numeri reali compresi fra 1 e 2. Il sistema di curve u ricopre con continuità l'intera superficie. Le curve non si intersecano, ma per ogni punto della superficie passa una ed una sola curva. In modo analogo si immagini tracciato un secondo sistema di curve v. Così, ad ogni punto della superficie rimane univocamente associata una coppia di valori (u,v), che diremo le coordinate gaussiane del punto sulla superficie. Il metodo esposto vale per un continuo a due dimensioni, ma può essere applicato a spazi con 3, 4 e più dimensioni. Ad ogni punto si assegneranno, in maniera univoca, tante coordinate quante sono le dimensioni del continuo. Le coordinate gaussiane sono la generalizzazione logica delle coordinate cartesiane.

4. Lo spazio quadridimensionale di Minkowski

Occorre illustrare qui brevemente il formalismo introdotto da Minkowski, che rappresenta in maniera più efficace la geometria della relatività ristretta.

Secondo la fisica classica il tempo è assoluto, cioè indipendente dalla posizione e dallo stato di moto del sistema di coordinate. In teoria della relatività, il tempo viene defraudato della sua indipendenza, come mostra la quarta equazione della trasformazione di Lorentz. Questa può essere caratterizzata in modo più semplice, introducendo un parametro immaginario in luogo del tempo t:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \sqrt{-1} ct$$

(Questa sembra in pratica un'estensione alla quarta dimensione del diagramma di Argand-Gauss, in cui l'asse immaginario è normale all'asse reale).

In questo modo, il tempo x_4 entra nella descrizione delle leggi naturali nella stessa forma delle coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 .

Formalmente lo spazio di Minkowski è uno spazio euclideo a quattro dimensioni. La sua introduzione risultò molto utile ad Einstein nelle sue indagini sulla relatività generale.

L'uso dello spazio di Minkowski, descrive bene i fenomeni fisici in regioni infinitesime che circondano tutti i punti (spazio-tempo localmente piatto). In presenza di gravità, lo spazio-tempo viene descritto da una *varietà* curva a quattro dimensioni, per la quale lo spazio tangente ad ogni punto è uno spazio di Minkowski.

5. Equazioni di campo

Per descrivere il comportamento di un sistema fisico in un campo gravitazionale, e quindi ricavare le equazioni del campo, Einstein lo descrive prima, nel formalismo di Minkowski, in un riferimento infinitesimo in *caduta libera*, cioè inerziale, in cui valgono le leggi della relatività ristretta. Poi, eseguendo la trasformazione inversa di quella usata per ottenere il sistema in caduta libera, riconduce la descrizione nello spazio-tempo curvo che si ottiene collegando i vari sistemi inerziali infinitesimi in caduta libera.

Seguendo l'idea illustrata nel paragrafo 1., Einstein prende in esame, nel suo laboratorio infinitesimo in caduta libera, il moto di un punto materiale libero in un campo gravitazionale, che nel sistema localmente inerziale del laboratorio risulta essere in moto rettilineo uniforme. Affinché questo stato di moto non vari nel tempo, e quindi possa essere studiato, il laboratorio deve percorrere, solidalmente col punto in esame, una geodetica dello spazio-tempo. Ogni deviazione da tale percorso rivelerà il campo, e quindi lo descriverà. Un osservatore esterno vede così, su larga scala, un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curva, la geodetica, piegata dalla gravità. Questa traiettoria si ottiene collegando tutti i punti attraversati dal laboratorio infinitesimo e dal punto, successivamente e con continuità. L'insieme di tutte le geodetiche formerà lo spazio curvo nella sua interezza.

Osservazione importante

E' questa l'idea fondamentale di Einstein che ha condotto alla formulazione della sua teoria generale della relatività. Il punto materiale libero (1) in moto, osservato dall'esterno, descrive col suo movimento, una geometria curvilinea che, nel suo insieme, con l'addensarsi ed il rarefarsi delle curve, indica, in maniera univoca, la variazione spaziale dell'azione della sorgente del moto. E' allora possibile, per la biunivocità introdotta con il principio di equivalenza, e per la sua proprietà transitiva, sostituire direttamente alla descrizione fisica (dinamica) del fenomeno osservato (2), la descrizione di questa sua geometria (3). Questa è una geometria non-euclidea, a 4 dimensioni, per studiare la quale Einstein ha potuto servirsi degli strumenti matematici preconfezionati introdotti da Gauss e Riemann e poi perfezionati da Ricci e Levi Civita.

- (1) In assenza di altre forze, diverse dalla gravità.
- (2) Qui si considera, per convenienza, la variazione spaziale di una quantità scalare, come il potenziale.
- (3) Come avviene nella rappresentazione tridimensionale dei campi in elettromagnetismo.

In accordo con l'idea testé osservata, per mettere in relazione la curvatura dello spazio-tempo alla sorgente del campo gravitazionale che lo ha generato, Einstein azzarda la seguente equazione:

$$A_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

dove al primo membro c'è la geometria ed al secondo la dinamica del moto in esame. $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso della materia, candidato a rappresentare la sorgente del campo, e $A_{\mu\nu}$, il tensore di Einstein, è un tensore da costruire sulla metrica dello spazio-tempo, descritta dal tensore $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate prime e seconde (essendo coinvolte nel problema la velocità e l'accelerazione). Utilizzando varie strutture e tecniche che i matematici avevano nel frattempo messo a punto, Einstein costruisce il suo tensore $A_{\mu\nu}$ e trova che:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}$$

Confrontando formalmente (1) questo risultato con il *potenziale* gravitazionale newtoniano (che è una funzione scalare della posizione, data dall'equazione di Poisson), si ricava il valore di k:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

(1) Qui si sta applicando il *Principo di covarianza*, che afferma che la forma matematica di una legge fisica *non deve variare* in seguito ad una trasformazione di Lorentz delle coordinate.

e si può scrivere l'equazione di campo nella sua forma finale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Questa equazione contiene, per come è stata ottenuta, tutte le informazioni geometriche necessarie per rappresentare lo spaziotempo della relatività generale, in presenza di un campo gravitazionale. Essa è valida nell'approssimazione di *campo debole* e per piccole velocità conduce alla gravità newtoniana. Vi compaiono le seguenti grandezze tensoriali:

R_{µν} = tensore di curvatura di Ricci, che misura il modo in cui il volume varia localmente rispetto al volume usuale di uno spazio euclideo,

 $g_{\mu\nu}$ = tensore metrico, che descrive la geometria locale dello spazio-tempo,

 $T_{\mu\nu}$ = tensore energia-impulso, che descrive il flusso di energia e quantità di moto associate al campo,

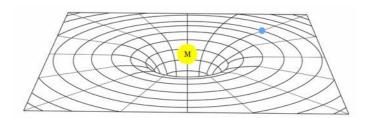
oltre a R, il cosiddetto scalare di curvatura, a G, la costante di gravità newtoniana ed alla consueta velocità della luce c.

La ricerca in Relatività Generale consiste nel *tentare* la difficile impresa di risolvere le equazioni di campo nei casi distanti dai limiti di campo debole e piccole velocità, per indagare sui fenomeni estremi che si osservano nello spazio profondo, in condizioni di grande densità massa-energia, o in presenza di singolarità (buchi neri). Finora tali tentativi non hanno dato risultati degni di nota.

6. La rappresentazione del campo gravitazionale

Il campo gravitazionale newtoniano è un campo vettoriale, nel senso che, nella regione in cui esiste, è misurabile in ogni punto un vettore, caratterizzato da intensità, direzione e verso del campo in quel punto. La rappresentazione usuale dei campi vettoriali fa uso del concetto di linea di campo: una curva orientata la cui tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo in quel punto. Le linee di campo sono curve regolari e continue, tranne che in eventuali punti singolari, in genere coincidenti con la posizione della sorgente del campo. Queste linee si concentrano nello spazio dove il campo è più intenso e si rarefanno dove è debole. L'insieme di tutte le linee di campo descrive una superficie (spazio) curva.

La rappresentazione del campo gravitazionale della teoria della relatività generale, realizzata in analogia a quanto sopra descritto, illustra bene i nuovi concetti introdotti da Einstein. Esaminiamoli con riferimento alla figura seguente (che è un'analogia tridimensionale, non essendo possibile rappresentarvi la quarta dimensione, il tempo, anche essa incurvata dalla gravità):



La presenza della massa M ha prodotto la deformazione dello spazio circostante, costringendoci a modificare la geometria da usare per descriverlo. Nella nuova geometria, la *geodetica* non è più una linea retta, per cui oggetti che altrimenti risulterebbero in moto rettilineo uniforme, in questo nuovo ambiente percorrono una geodetica dello spazio-tempo che non è più rettilinea, ma curvilinea.

Einstein ha *geometrizzato* la gravitazione universale, trasformandola da una descrizione dinamica ad una puramente geometrica, in cui le

traiettorie degli oggetti in moto (*orbite*) sono dovute non più alla forza di attrazione del Sole, ma al fatto che questo con la sua massa ha deformato la geometria dello spazio-tempo intorno a sé. La curvatura dei raggi di luce, prevista dalla teoria ed osservata durante l'eclisse solare del 1919, si spiega così: non sono i raggi di luce che si incurvano, ma lo spazio in cui viaggiano.

DAL BIG BANG ALL'UOMO

Il nostro Universo ha avuto inizio 13,7 miliardi di anni fa da un'enorme esplosione, il <u>Big</u> <u>Bang</u>. Prima di questo evento tutta l'energia e tutta la materia dell'attuale Universo erano compresse in un punto infinitamente piccolo.

Subito dopo l'esplosione la temperatura era di circa 100 miliardi di gradi Celsius. La materia era presente sotto forma di particelle con carica positiva, i protoni, oppure prive di carica, i neutroni; a causa dell'elevata energia, queste particelle si scontravano tra loro aggregandosi e formando quelli che sarebbero divenuti i primi nuclei atomici. Successivamente, quando l'Universo raggiunse una temperatura di circa 2500 °C, i protoni cominciarono ad attrarre piccole particelle con carica negativa, gli elettroni (provenienti dal decadimento beta dei neutroni), che resero possibile la formazione dei primi atomi.

All'inizio lo spazio era pieno di un solo tipo di atomo: il più semplice, l'idrogeno, fatto di un protone positivo e un elettrone negativo. Per effetto della forza di gravità, i nuclei di idrogeno si avvicinarono abbastanza da superare la forza di repulsione elettrica, unendosi in coppie protone-protone. Tali coppie non potevano esistere come tali, e quindi uno dei due protoni decadeva trasformandosi in un neutrone. Il protone superstite e il neutrone appena formato si legarono insieme a formare nuclei di atomi di deuterio (deutoni)¹. Dopo di che altre reazioni nucleari crearono (nelle stelle) nuclei più complessi di altri elementi, più pesanti dell'idrogeno, dall'elio (con due protoni e uno o due neutroni) fino al carbonio, l'azoto, l'ossigeno e così via.

1 - Il deutone deve la sua esistenza alla capacità di trovarsi contemporaneamente in due stati, a causa della sovrapposizione quantistica. Il protone e il neutrone possono stare attaccati in due modi diversi, a seconda di quale è il loro spin. All'interno del deutone queste due particelle non esistono in uno o nell'altro di questi stati, ma in entrambi gli stati allo stesso momento: se così non fosse il legame tra loro non sarebbe abbastanza forte da tenerli assieme: il nostro universo sarebbe rimasto una brodaglia di idrogeno. Senza stelle a brillare, nessuno degli altri elementi si sarebbe formato, e voi non stareste leggendo queste righe.

Circa 5 miliardi di anni fa, all'interno di una nube primordiale di gas e polveri, dotata di un lento moto di rotazione su se stessa, si formò il nostro sistema solare. Come conseguenza di perturbazioni gravitazionali, la nube cominciò a collassare su se stessa e la sua velocità di rotazione andò aumentando man mano che le particelle di materia "cadevano" verso il suo centro; per effetto della rotazione, la nube si contrasse e assunse la forma di un disco appiattito, al cui centro andava accumulandosi la maggior parte della materia originaria, mentre la materia residua andava condensandosi in una serie di anelli periferici ruotanti intorno al centro. A un certo punto, la massa centrale collassò su sé stessa per effetto della gravità, dando origine al Sole. Negli anelli periferici si formarono i pianeti, come risultato di una complessa sequenza di processi di accumulazione e di aggregazione di polveri e di gas, dapprima in piccoli granuli e via via in corpi di massa più grande che, attraendosi gravitazionalmente, formarono ammassi maggiori, i futuri pianeti.

La <u>Terra</u> si formò circa 4,5 miliardi di anni fa. Inizialmente la sua massa era un agglomerato di roccia, metalli, gas ed elementi radioattivi, in uno stato di fusione in cui la Terra si presentava come una sfera fusa omogenea e indifferenziata. Nel fuso in via di raffreddamento cominciarono a separarsi i materiali più pesanti che si concentrarono verso il centro. Si ebbe quindi la separazione della Terra in tre gusci concentrici: la crosta, il mantello e il nucleo, la prima ricca di silicio e alluminio, il secondo ricco di silicio e magnesio, il terzo composto da ferro e nichel. L'attività vulcanica produsse l'atmosfera primordiale; il

vapore acqueo, condensato e incrementato dal ghiaccio trasportato dalle comete, formò gli oceani.

L'atmosfera della Terra primordiale era composta in prevalenza da idrogeno, metano, ammoniaca, vapore acqueo e diossido di carbonio (anidride carbonica); l'ossigeno era invece presente in quantità trascurabile (per questo si dice che l'atmosfera era riducente). La radiazione solare e i fulmini fornivano l'energia necessaria per spezzare i legami di sole molecole inorganiche e formare molecole organiche semplici. Queste ultime, in assenza di ossigeno (con cui avrebbero reagito decomponendosi), ebbero modo di accumularsi in bacini d'acqua calda. Si formò così il cosiddetto brodo primordiale. Successivamente, le molecole nel brodo primordiale (tra cui amminoacidi, lipidi, zuccheri semplici) si sarebbero aggregate in microsfere, ipotizzate come le prime cellule o protocellule. Ogni microsfera era dotata di una membrana che separava l'ambiente interno da quello esterno; poteva assorbire del materiale (nutrimento) dall'ambiente esterno, crescere di dimensioni e replicarsi.

Le prime cellule viventi comparvero circa 3900 milioni di anni fa. La cellula vivente possiede quattro caratteristiche particolari che la distinguono dalle protocellule: - la comparsa di una membrana esterna che separa la cellula dall'ambiente circostante e le permette di mantenere una propria identità chimica; - la presenza di complesse molecole, gli enzimi, indispensabili per l'efficace svolgimento delle reazioni chimiche da cui dipende la vita: - la possibilità di evolversi grazie a variazioni che compaiono nel corso delle generazioni; - la capacità di riprodursi dando origine a nuove cellule. Le prime a comparire furono le cellule procarioti anaerobiche ed eterotrofe, riconducibili a batteri. Questi si nutrivano dei composti organici presenti nell'ambiente e ricavavano l'energia necessaria al proprio mantenimento grazie a processi di fermentazione. Il progressivo impoverimento delle sostanze nutritive nel brodo primordiale favorì quelle cellule che, per sintetizzare i composti organici, avevano sviluppato la capacità di attuare la fotosintesi, cioè utilizzare il diossido di carbonio e la radiazione solare per ricavare l'energia necessaria a questo processo. Comparvero così insieme alla fotosintesi le prime cellule autotrofe, i cianobatteri. La trasformazione fotosintetica dell'acqua e del diossido di carbonio in composti organici libera ossigeno come sottoprodotto. L'atmosfera iniziò così ad arricchirsi di ossigeno e si crearono le condizioni favorevoli per l'evoluzione dei batteri aerobici, cioè in grado di effettuare la respirazione cellulare, un processo più efficiente della fermentazione per ricavare energia dagli alimenti.

Circa 1,6 miliardi di anni fa alcuni batteri anaerobici, che si nutrivano inglobando batteri interi, avrebbero dato origine alle cellule <u>eucarioti</u>. Ciò sarebbe avvenuto in seguito al verificarsi di due tipi di simbiosi metaboliche: - tra un batterio anaerobico ed eterotrofo e un batterio aerobico (che si evolve in <u>mitocondrio</u>): in questo caso si sarebbe formata la cellula animale; - tra un batterio contenente dei mitocondri e un cianobatterio (che si evolve in <u>cloroplasto</u>): in questo caso si sarebbe formata la cellula vegetale. È probabile che anche i <u>flagelli</u> e altri organuli cellulari siano stati acquisiti con questo tipo di simbiosi. La membrana nucleare, invece, si sarebbe formata in seguito a un ripiegamento all'interno della membrana cellulare a formare una cavità.

La ricostruzione degli eventi che hanno segnato il passaggio da organismi unicellulari a organismi pluricellulari è ancora incerta. I vantaggi offerti dall'organizzazione pluricellulare sono: l'aumento delle dimensioni, la specializzazione, la riproduzione sessuata. I primi organismi pluricellulari erano privi di parti dure adatte alla fossilizzazione, perciò di loro si sono conservate solo alcune impronte. Si sa che circa 1,4 miliardi di anni fa comparvero nel mare le alghe e 600 milioni di anni fa i primi animali, simili a meduse. Circa 590 milioni di anni fa si verificò un cambiamento nella composizione dell'acqua del mare: l'arricchimento di silice e sali di calcio e fosforo favorì lo sviluppo di strutture mineralizzate (esoscheletri,

gusci e conchiglie) che meglio si conservano come fossili. Da questo momento, l'esplosione cambriana, i resti fossili sono perciò più frequenti e denotano la presenza in mare di organismi dalla forma varia (trilobiti, ammoniti, vermi e altri di dubbia classificazione).

Nelle acque del cambriano, oltre 600 milioni di anni fa, l'evoluzione degli animali aveva preso due vie diverse: da un lato gli invertebrati, dall'altro i cordati, antichi precursori dei pesci, il cui modo di alimentarsi, rimase a lungo estremamente primitivo, perché basato solo sulla filtrazione dell'acqua per ricavarne quel po' di cibo che vi era sospeso. Questi probabili progenitori dei pesci erano animali di piccole dimensioni, senza struttura scheletrica, esili, diafani, impossibili da fossilizzare. Poi, improvvisamente, 450-500 milioni di anni fa circa. comparvero nei mari i primi sicuri vertebrati: gli ostracodermi, animali di piccole dimensioni, pochi centimetri, ma dotati di una pesante corazzatura ossea che copriva la testa e parte del tronco, formatasi o per la precipitazione di sali di calcio, oppure per la protezione dagli attacchi di giganteschi artropodi che popolavano i mari di guel periodo. Questi animali avevano già l'organizzazione generale tipica dei vertebrati, con gli stessi organi e apparati che ci caratterizzano. La loro bocca, però, era molto primitiva, immobile, circolare, utilizzata solo per aspirare l'acqua e nutrirsi delle sostanze organiche che vi erano sospese. Con il procedere dell'evoluzione tra gli invertebrati si scoprì che per utilizzare altre fonti di cibo occorrevano una bocca e delle armature specifiche. Rapidamente in questa grande linea evolutiva comparvero bocche adatte per afferrare, strappare, succhiare, masticare, schiacciare, eccetera. La linea evolutiva dei pesci, invece, fu in deciso ritardo; non solo gli antichi precursori, ma anche tutto il primo gruppo di vertebrati erano animali filtratori di acqua o di fango. La bocca mobile comparve quasi improvvisamente in pieno Siluriano, più di 400 milioni di anni fa. Era una bocca provvista di arco mandibolare, capace di aprirsi e chiudersi, provvista di denti. Essa fece mutare sostanzialmente le tecniche dell'alimentazione: ora l'animale poteva cercarsi direttamente la fonte di cibo, cacciare, procurarsi velocemente grandi quantità di alimento. La scoperta venne subito premiata: le nuove forme di pesci si affermarono rapidamente a spese naturalmente degli inoffensivi ostracodermi. I nuovi venuti, i placodermi, si diffusero su tutta la terra; nessuno era in grado di contrastarli; crebbero anche in lunghezza e peso e per la prima volta la vita nelle acque cominciò ad assumere dimensioni gigantesche.

Con il progressivo aumento dell'ossigeno nell'atmosfera e la formazione dello strato di ozono a schermo delle radiazioni ultraviolette, l'ambiente della terraferma divenne idoneo all'insediamento dei viventi. I primi organismi che si svincolarono dall'acqua furono vegetali derivati dalle alghe verdi, che gradualmente svilupparono strutture simili a radici, per l'ancoraggio alla superficie, vasi, per il trasporto dell'acqua e della linfa, e organi adibiti alla riproduzione, per proteggere i gameti dalla disidratazione. Il clima caldo-umido favorì lo sviluppo di felci arboree e licopodi, i cui resti fossilizzati hanno prodotto i vasti giacimenti di carbone fossile. Un successivo periodo secco segnò il passaggio alle gimnosperme, resistenti alla siccità; da queste 100 milioni di anni più tardi evolsero le angiosperme, che attualmente dominano l'ambiente terrestre.

Poco dopo le piante anche gli animali iniziarono a colonizzare la terraferma. Per primi gli artropodi (crostacei, ragni, insetti ecc.), che già nel mare avevano sviluppato una struttura di sostegno esterna (esoscheletro) impermeabile e rigida, che evitava al corpo di essere "schiacciato" dalla pressione idrostatica. Gli artropodi svilupparono forme varie e di grandi dimensioni, che dominarono incontrastate l'ambiente terrestre per decine di milioni di anni. Circa 350 milioni di anni fa dai crossopterigi, un gruppo di pesci dotati di pinne robuste e muscolose e di una sporgenza del canale digerente (polmone rudimentale), derivarono gli anfibi. Gli anfibi svilupparono veri e propri arti e polmoni più efficienti. Essi però non si svincolarono definitivamente dall'acqua, dalla quale dipendevano soprattutto per la

riproduzione. Da un gruppo di anfibi, che avevano sviluppato degli adattamenti alla siccità, derivarono i rettili. Diversamente dai loro progenitori, i rettili hanno la pelle coperta di squame impermeabili, la loro fecondazione è interna e le uova sono protette da un guscio impermeabile. Come gli anfibi, anche i rettili sono animali eterotermi, cioè disperdono facilmente il calore corporeo. I rettili dominarono sulla fauna terrestre per circa 250 milioni di anni. Durante questo periodo si svilupparono forme di grandi dimensioni, tra le quali i dinosauri. Alcuni rettili si adattarono alla vita acquatica, altri divennero capaci di compiere voli planati, grazie a particolari espansioni della pelle.

Circa 65 milioni di anni fa un mutamento climatico su scala planetaria, provocato probabilmente dall'impatto di un enorme meteorite con la Terra, determinò l'estinzione di numerose specie, tra cui tutte le ammoniti e molti rettili. Nel frattempo alcuni rettili avevano sviluppato peli e penne per trattenere il calore corporeo (animali endotermi). In questo modo essi potevano essere attivi anche di notte ed evitare i predatori eterotermi, che erano intorpiditi dal freddo. Gli uccelli derivarono da rettili provvisti di penne, che ne svilupparono di più lunghe e forti alle estremità degli arti anteriori e della coda. Poterono così dapprima planare e in seguito volare, grazie anche ad alcuni adattamenti dello scheletro e della muscolatura. Dai rettili ricoperti di peli si svilupparono i mammiferi, caratterizzati dal fatto di partorire figli vivi e non uova (viviparità) e dalla presenza di ghiandole mammarie. I primi mammiferi erano di piccole dimensioni e attivi solo di notte. Quando la maggior parte dei rettili si estinse, i mammiferi si diversificarono e occuparono tutti gli ambienti.

Dai mammiferi si svilupparono i primati, l'ordine al quale appartiene l'uomo. I primati originari erano animali notturni, arboricoli, con mani e piedi prensili, muso piatto, occhi grandi e frontali che consentivano la visione stereoscopica, prerogativa dei predatori loro antenati. Progressivamente alcuni primati divennero diurni, acquisirono la capacità di vedere i colori e per spostarsi da un ramo all'altro adottarono la brachiazione. Questo metodo di locomozione, che consiste nel tenersi sospeso con le braccia, comportò (oltre all'importante opponibilità del pollice) delle modifiche a livello della colonna vertebrale e del bacino, che consentirono la successiva evoluzione della stazione eretta, tipica dell'uomo. A circa 20 milioni di anni fa risale un gruppo di primati, le driopitecine, con caratteri umanoidi, ma vita ancora arboricola. Dalle driopitecine derivarono le ramapitecine, parzialmente adattate alla vita al suolo. I primi ominidi appartengono al genere australopithecus e i loro resti fossili sono stati trovati in Tanzania e in Etiopia. Gli australopithecus comparvero attorno a 4,4 milioni di anni fa.

18 milioni di anni fa, la placca africana, spinta contro la penisola arabica, aveva formato l'altopiano etiopico. Il flusso delle correnti umide occidentali che portavano la pioggia in Africa orientale venne rallentato. Si produsse sull'altopiano una parziale desertificazione. Le locali foreste d'alto fusto si trasformarono in savane con pochi alberi distanti tra loro, molta erba e bassi arbusti. Questa modifica ambientale costrinse alcune delle razze di scimmie arboricole ivi esistenti ad adattarsi alla vita a terra, diventando bipedi in modo permanente. Il bipedismo portò ad un maggior controllo del territorio (raddrizzandosi si estende il campo visivo) e permise l'uso delle mani, per raccogliere frutti e bacche selvatici o trasportare le prede catturate. Per sopravvivere si impugnarono con gli arti superiori, come utensili d'aiuto, rami secchi o pietre trovate casualmente sul terreno. Il passaggio successivo fu quello di modificare questi utensili rudimentali migliorandoli, ossia strofinandoli sulle rocce ruvide per appuntirili o batterli per scheggiarli e renderli più taglienti. Nacque così l'Homo abilis (2.500.000 anni fa).

Dopo l'Homo abilis comparve l'<u>Homo erectus</u> (1.800.000 anni fa) nell'Africa orientale e si diffuse successivamente sia in Asia che in Europa con lente migrazioni fino a 90.000 anni

fa. In Europa la sua diffusione fu limitata solo alla fascia centro-meridionale, per il fatto che questi erano gli unici territori lasciati liberi dalla spessa coltre dei ghiacci che in quel periodo ricopriva tutto il nord Europa e metà dell'Asia. L'Homo erectus, con un linguaggio fonetico molto limitato, visse in piccoli gruppi a livello familiare e produsse utensili, sia litici che lignei molto semplici. Per la sua sopravvivenza, gli fu necessario disporre di grandi territori di caccia. La continua competizione con gli animali predatori e la perenne cacciagione necessaria alla sopravvivenza non gli permisero di sviluppare né primitive espressioni artistiche, né forme elementari di socialità con altri gruppi paralleli. Nella sua espansione verso nord alla ricerca di nuove zone vitali si ambientò esclusivamente nei ripari naturali (grotte o rocce sporgenti), e circa 400.000 anni fa iniziò a dominare il fuoco, con cui poté cuocere la carne per renderla più digeribile, scaldarsi durante la notte e difendersi meglio dagli animali predatori (orsi, tigri, leoni, iene) suoi competitori. Sviluppò il linguaggio, che favorì l'organizzazione degli uomini in tribù.

Circa 200.000 anni fa in Europa si trovava Homo di Neanderthal, dal nome di una piccola valle nella Germania occidentale dove avvennero i primi suoi ritrovamenti. Robusto, massiccio, muscoloso, con le ossa spesse, era geneticamente adatto all'ambiente ostile di quel periodo. La sua sopravvivenza e quella del suo nucleo familiare dipendevano solo dalla sua predazione, se si esclude una limitata raccolta di frutti selvatici durante il periodo estivo. Il clima molto rigido costrinse questi uomini primitivi a scacciare gli animali che abitavano nelle grotte per insediarsi al loro posto in questi primi rudimentali ripari naturali.

Seppellivano i loro morti in fosse ricoperte con terra e pietre appositamente scavate nelle stesse grotte che abitavano, svolgendo forse pratiche rituali. Il loro territorio di caccia era necessariamente molto ampio, e quando la selvaggina si allontanava per migrazione o per diradamento naturale, erano costretti a spostarsi in altri territori, trovandosi quindi anche una nuova caverna. Una lenta migrazione verso nord lo portò dall'Africa orientale nel nord Africa e poi in tutta l'Europa, dove dominò incontrastato per almeno 250.000 anni, sopravvivendo in un ambiente decisamente ostile di freddo e ghiaccio. Usava inizialmente solo utensili molto semplici e rudimentali fatti di selce e legno. Successivamente iniziò a produrre una serie di armi e di utensili: diverse varietà di asce, punte di lance e raschiatoi, in pratica senza variazioni per tutti i 250.000 anni di predominio sul territorio. La sua organizzazione sociale era strutturata in piccole tribù sparse su un territorio molto ampio, e quindi molto lontane fra di loro per ragioni di spazi vitali di caccia. Non si hanno notizie di espressioni artistiche particolari. È stato stimato che tutta la popolazione di Homo sapiensneandertaliano nel periodo di maggior diffusione (50.000 anni fa) fosse di poco superiore ai 100,000 individui. Solo intorno a 35,000 anni fa si ebbero delle innovazioni apprezzabili nella sua evoluzione, perché nei reperti di quel periodo si iniziano a notare nuovi utensili realizzati con corna di cervi, ossa, denti di orso, e si ritrovano anche alcuni semplici monili da ornamento. Questi ritrovamenti coincidono però con il sopraggiungere in Europa dell'Homo sapiens.

L'Homo sapiens, proveniente dall'Africa dove si era evoluto circa 200.000 anni fa, iniziò a diffondersi fuori dell'Africa a partire da 60.000 anni fa, raggiungendo anche l'Australia. In Europa giunse 45.000 anni fa ed in 10.000 anni si sovrappose al preesistente Homo di Neanderthal, probabilmente perché più intelligente, migliore costruttore di utensili, con una forma di linguaggio più evoluto, fisicamente più alto anche se meno robusto, diventando in Europa l'Homo di Cro-Magnon (dalla caverna omonima in Francia dove sono stati rinvenuti i suoi primi resti fossili). Era in grado di lavorare ossa e corna da cui otteneva, tra l'altro, aghi e arpioni per la pesca. Sviluppò un senso artistico, testimoniato da numerosi ritrovamenti di pitture rupestri, statuette di animali e figure femminili. Addomesticò gli animali e sviluppò l'agricoltura. L' Homo di Neanderthal si estinse naturalmente tra i 28.000 e i 30.000 anni fa

perché probabilmente non in grado di competere con l'intelligenza organizzativa, i gruppi tribù più numerosi e l'abilità manuale e di caccia dell'Homo sapiens, che diede poi origine alle genti che abitarono l'Europa e l'Asia e da cui discesero i prototipi delle varie razze attualmente viventi. Da una approfondita indagine eseguita sul DNA dei reperti fossili risulta che le due razze non sono compatibili quindi si può supporre che non si fusero, anche se coabitarono per molto tempo. L'unica notizia che dovrebbe documentare l'avvenuta fusione tra le due genie dipenderebbe dal ritrovamento che nel 1998 è stato fatto in Portogallo, dove si è rinvenuto uno scheletro di un bimbo di 4 anni che riporta le caratteristiche miste delle due specie, e che alla datazione risulterebbe essere vissuto in un'epoca stimata a circa 3.000 anni dopo la presunta estinzione dell'Homo di Neanderthal.

SULLA RAREFAZIONE DELLA MATERIA NELL'UNIVERSO

Secondo la teoria cosmologica del Big Bang, l'universo sarebbe nato, circa 14 miliardi di anni fa, dall'esplosione di una singolarità: un punto infinitesimale dove tutta la materia era inizialmente concentrata sotto forma di energia.

In fisica classica (la fisica della nostra realtà oggettiva) con il termine materia, si indica genericamente qualsiasi oggetto che abbia massa e che occupi spazio. Questa definizione, che ben si accorda con la nostra percezione della realtà, ci fa sembrare assurda la sopradetta ipotesi che tutta la materia dell'universo possa essere stata inizialmente confinata in una regione cosi piccola, puntiforme addirittura.

Ma quanto spazio occupa "realmente" la materia? Per rispondere a questa domanda condurremo una indagine osservativa, su scale diverse, che come vedremo si spingerà fino a considerare i componenti più elementari della materia.

Partiremo da una scala macroscopica, considerando il nostro sistema solare, per vedere quanta parte di esso è occupata dalla sua materia costituente. Le misurazioni astronomiche indicano che il 99,86 % della massa complessiva del sistema solare è concentrata nel Sole, una stella medio-piccola del diametro di 1,39 milioni di chilometri, con una densità media di circa 1.400 kg/m³. Potremmo limitarci ad esso nella nostra indagine, ma estendiamola considerando anche la distribuzione dei pianeti sul piano orbitale del sistema.

Per una più facile visualizzazione, useremo la scala del nostro ambiente vitale, riducendo la distanza interplanetaria di un milione di chilometri ad un metro. In questa scala, il Sole è una sfera del diametro di 1 metro e 39 cm, posta al centro del sistema. Ad una distanza di 58 m orbita Mercurio, una sfera del diametro di appena 5

mm! A 108 m dal Sole si trova Venere, con un diametro di 12 mm. Quindi la Terra, a 150 m dal Sole, con un diametro di 13 mm. Poi troviamo Marte, a 234 m ed un diametro di 7 mm. Poi Giove, con 143 mm di diametro, a 779 m dal Sole. Poi ancora Saturno, a 1.427 m e un diametro di 121 mm. A 2.857 m orbita Urano, una sfera del diametro di 51 mm. Infine troviamo Nettuno, a 4.497 m dal Sole e con un diametro di 50 mm. Abbiamo trascurato Plutone, i pianeti nani, i satelliti, gli asteroidi ed altri oggetti minori del sistema solare.

Si ottiene certamente una descrizione migliore se si usano, per rappresentare il Sole e i pianeti, gli oggetti del nostro vivere quotidiano, e si raggiunge un risultato ancora più realistico se traduciamo, nel nostro immaginario, le distanze interplanetarie con gli spazi che ci separano, nel luogo in cui abitualmente viviamo, dai posti che frequentiamo, quali chiese, teatri, piazze, mercati, ecc.

Il Sole è quindi qui accanto a noi ed è un palloncino giallo gonfiato fino al diametro di un metro e mezzo. Poi c'è Mercurio, un pisello che gli ruota intorno a 60 metri di distanza. Quindi troviamo Venere, la biglia di un bambino, a 110 metri dal Sole. A 150 metri c'e la nostra Terra, una biglia un pò più grande. Poi, a circa 240 metri, incontriamo Marte, grande come un mirtillo. Dopo c'è Giove, una boccia da gioco, a 800 metri dal Sole. Poi ancora Saturno, un pompelmo, posto a circa un chilometro e mezzo dal Sole. Urano è una palla da golf a circa 3 chilometri. Infine troviamo Nettuno, un'altra palla da golf a quattro chilometri e mezzo dal Sole.

Negli spazi interplanetari regna il vuoto assoluto. Dobbiamo ora tirare in ballo gli spazi interstellari che ci circondano, anche essi vuoti.

Nell'intorno del nostro sistema solare, entro un raggio di 15 anni luce, gli astronomi hanno individuato una trentina di sistemi stellari, distribuiti con una certa uniformità. Ipotizzando per ciscuno di questi sistemi una situazione simile a quella osservata nel nostro sistema solare, si potrebbe concludere che lo spazio occupato dalla materia in una sfera intorno a noi, del raggio di 15 anni luce, si possa

rappresentare (nella stessa scala usata prima: 1 m = 1 milione di km) come una sfera del diametro di 4-5 m, posta al centro di una sfera vuota del raggio di 142.000 km, corrispondenti ai 15 anni luce prima considedrati.

Ma è lecito estendere a tutto l'universo le conclusioni appena tratte dalle osservazioni eseguite nel nostro intorno strellare? La risposta è si, se si applica il cosiddetto Principio Cosmologico, che, affermando che l'universo sia *omogeneo* e *isotropo*, ci autorizza ad estrapolare i risultati delle nostre osservazioni, necessariamente limitate, all'universo intero.

Torniamo ora alle nostre osservazioni. Nel nostro modello semplificato dell'universo intero, ci troviamo quindi di fronte ad una sfera di 4-5 m di diametro, situata al centro di un'altra sfera, vuota, che si estende intorno a noi fino ad una distanza pari circa alla metà della distanza Terra-Luna. Tutta la materia dell'universo è qui davanti a noi, concentrata in questa sfera, e sembra occupare tutto lo spazio a sua disposizione. Ma non è così: è la limitatezza dei nostri sensi, della vista in particolare, che ci dà questa sensazione di compattezza e impenetrabilità. In realtà, come vedremo, stiamo osservando un corpo materiale praticamente vuoto!

Supponiamo di essere dotati, come i super-eroi, di una vista a raggi x e della capacità di miniaturizzarci fino a dimensioni atomiche. Useremo queste capacità per penetrare all'interno dell'oggetto che osserviamo, per sondarlo più in profondità. Incontreremo altri mondi.

Avendo quindi ridotto il nostro corpo a dimensioni atomiche, ci ritroviamo a viaggiare, in uno spazio interatomico vuoto, alla ricerca di *protoni* da esaminare da vicino. Ne individuiamo uno: si tratta del protone centrale di un atomo di idrogeno. Ha le dimensioni di una palla da golf. Fuori di esso, un singolo *elettrone*, anch'esso privo di dimensioni percettibili, «riempie» una sfera atomica di tre chilometri di diametro: un bruscolino invisibile che riempie un volume gigantesco!

Utilizziamo ora la nostra vista a raggi x(1) per vedere cosa c'è

all'interno della nostra palla da golf (il protone). Osserviamo che vi ronzano, rimbalzando avanti e indietro ad una velocità prossima a quella della luce, *quark* e *gluoni*, che sono i componenti elementari del protone. Il protone risulta composto da tre quark e dai gluoni che mediano l'interazione forte che lega i quark dando stabilità e quindi vita eterna al protone. I quark sono particelle puntiformi, cioè prive di estensione spaziale, eppure dotate di massa. I gluoni, come i quark, sono anch'essi puntiformi, ma sono privi di massa. Anche i *neutroni*, qui assenti, sono composti da quark e gluoni.

(1) - L'uso dei raggi x per penetrare nel protone è qui metaforico: i raggi x non hanno abbastanza energia per farlo.

Siamo quindi giunti alla conclusione della nostra indagine, avendo infine osservato che, oltre ad essere estremamente rarefatta nell'universo, la materia è costituita, a livello elementare, da particelle effimere, con un'estensione spaziale praticamente nulla. Appare quindi plausibile l'ipotesi esposta all'inizio di questo articolo, secondo cui tutta la materia dell'universo possa essere stata inizialmente confinata in un punto.

Si calcola che la densità media della materia nel nostro universo sia di un atomo di idrogeno ogni centimetro cubo di spazio! Questo risultato, insieme all'evidenza che un atomo di idrogeno è formato da un elettrone, tre quark ed i pochi gluoni che li tengono insieme, tutte particelle puntiformi, ha dell'incredibile, proprio come prima ci sembrava assurda l'ipotesi della singolarità iniziale della teoria del Big Bang.

Concludiamo con alcune considerazioni sulla nostrea percezione della realtà. Diamo un'occhiata allo spazio vuoto che c'è tra due oggetti posati sulla nostra scrivania: che cosa vediamo? Niente diremo. Tuttavia sappiamo che in quello spazio apparentemente vuoto, esiste invece una moltitudine di forme, come granelli di polvere, acari, migliaia di trasmissioni radio e televisive, milioni di conversazioni tramite cellulare. Lo spazio che ai nostri occhi fisici sembra vuoto, è in realtà, molto congestionato! D'altro canto, come

abbiamo visto, lo spazio occupato dagli oggetti solidi risulterebbe in realtà praticamente vuoto. Tutto ciò è dovuto alla limitatezza della nostra vista, che funziona entro i limiti del cosiddetto spettro della luce visibile, sufficiente per le nostre necessità biologiche, ma inadeguato per una descrizione completa del mondo fisico che ci circonda, potendoci spesso condurre a conclusioni fuorvianti. Tuttavia la scienza e la tecnica ci permettono di ampliare i limiti dei nostri sensi, fornendoci ogni giorno sofisticati mezzi tecnologici in grado di consentirci una conoscenza della realtà sempre più profonda e veritiera.

L'uomo, questo meraviglioso prodotto dell'evoluzione della materia originatasi col big bang, è stato in grado di trascendere la materia stessa di cui è composto, arrivando infine a spiegarne l'essenza più profonda!

Il pettirosso quantistico

Per orientarsi sul globo terrestre gli animali usano una moltitudine di metodi diversi: alcuni osservano il Sole durante il giorno e le stelle di notte, altri memorizzano punti di riferimento nel paesaggio, altri ancora sono guidati dall'olfatto. Ma il sistema di navigazione più misterioso è quello del pettirosso: lui ha la capacità di rilevare la direzione e l'intensità del campo magnetico terrestre, chiamata «magnetoricezione».

Il meccanismo che permette al nostro pettirosso di sapere per quanti chilometri volare, e in quale direzione, è codificato nel suo DNA, che ha ereditato dai genitori. Esso ha l'abilità di sentire il campo magnetico terrestre, e di ottenere informazioni sulla direzione da tenere per mezzo di un senso di navigazione, che comporta l'uso di un particolare tipo di bussola chimica. Si stabilì che il senso magnetico dei pettirossi funziona come una bussola di inclinazione, che misura l'angolo di inclinazione tra le linee del campo magnetico e la superficie terrestre, permettendo al pettirosso di distinguere il polo dall'equatore. Ma non era chiaro come potesse funzionare una bussola biologica di questo genere e come facesse il pettirosso a «sentire» il campo magnetico terrestre, che essendo molto debole non può essere rilevato da un animale. La risposta a queste due domande è stata trovata all'interno di una delle teorie scientifiche più sorprendenti del nostro tempo, e ha a che fare con lo strano mondo della meccanica quantistica.

Gli elettroni hanno una proprietà chiamata *spin*, visualizzabile come una rotazione dell'elettrone su se stesso, nei sensi orario o antiorario, corrispondenti agli stati quantici di «spin su» o «spin giù». Un elettrone può trovarsi contemporaneamente in entrambi gli stati: stato di *sovrapposizione quantistica*. Per il principio di esclusione di Pauli due elettroni accoppiati in un atomo, con la stessa energia, devono avere spin opposto. Allora si può pensare che gli spin si cancellano a vicenda, e diciamo che gli elettroni sono in uno «stato di singoletto». Quando non sono accoppiati allo stesso livello di energia, due elettroni possono avere spin uguale, e questo si chiama «stato elettronico di tripletto».

Consideriamo due elettroni in un atomo, ognuno in sovrapposizione di due stati di spin. Sebbene entrambi gli elettroni siano in sovrapposizione e si trovino in entrambi gli stati, spin su e spin giù, devono anche, in ogni istante, avere spin opposto. Ora separiamo i due elettroni, così che non si trovino più nello stesso atomo. Se a questo punto decidiamo di misurare lo stato di spin di uno degli elettroni, trovandolo in stato di spin su, scopriamo che il secondo elettrone ha istantaneamente, e a distanza, cambiato il proprio stato, dalla sovrapposizione allo spin giù, senza che nessuno lo toccasse. Tutto ciò avviene grazie alla *correlazione quantistica*: le due particelle restano collegate, anche se situate a grande distanza fra loro.

I legami tra gli atomi e tra le molecole, si formano tramite la condivisione di una coppia di elettroni, sempre in correlazione quantistica, e quasi sempre in stato di singoletto. Quando un legame si rompe, gli atomi separati, chiamati «radicali liberi», si possono allontanare l'uno dall'altro, e se lo spin di uno degli elettroni si inverte,

succede che i due elettroni in correlazione quantistica tra loro (che ora sono su atomi diversi) si trovano in sovrapposizione di stati di singoletto e di tripletto. Le coppie di radicali liberi tendono a essere molto *instabili*, quindi i loro elettroni spesso si ricombinano a formare i prodotti di una reazione chimica, la cui natura chimica dipende dall'equilibrio singoletto-tripletto, che risulta sensibile al *debole*⁽¹⁾ campo magnetico terrestre.

(1) Si pensi ad un blocco di granito in equilibrio instabile su un suo spigolo, che si rovescia quando una mosca gli si posa sopra.

Ecco quindi un meccanismo per cui i campi magnetici riescono a influenzare le reazioni chimiche, e quindi a fornire una bussola magnetica al nostro pettirosso. Il ricettore di una tale bussola sarebbe una proteina che si trova nell'occhio del pettirosso: il crittocromo. Un fotone di luce blu viene assorbito da una molecola sensibile alla luce, il pigmento flavina adenina dinucleotide (FAD) all'interno del crittocromo. L'energia di questo fotone viene usata per emettere un elettrone da uno degli atomi della FAD, lasciando al suo posto una lacuna elettronica. Questa può essere riempita da un altro elettrone, donato da una coppia di elettroni in correlazione quantistica in un amminoacido, chiamato triptofano, all'interno del crittocromo. L'elettrone donato rimane in correlazione con il suo compagno, e la coppia di elettroni correlati può trovarsi in una sovrapposizione di stati di tripletto e singoletto, che è particolarmente sensibile alla forza e all'angolo del campo magnetico terrestre. quindi la direzione in cui vola l'uccellino crea una differenza nella composizione dei prodotti chimici finali generati dalla reazione. In qualche modo, mediante un meccanismo non completamente chiaro nemmeno ora, questa differenza genera un segnale, che viene inviato al cervello e indica all'uccello dov'è il polo magnetico più vicino. Non abbiamo idea di cosa provino gli uccelli, in che modo riescano a «vedere» il campo magnetico, ma siccome il crittocromo è un pigmento, potenzialmente funziona in modo simile ai pigmenti che permettono di vedere i colori. Ouindi, forse, quando gli uccelli guardano il cielo vedono un altro colore, a noi invisibile, che disegna ai loro occhi il grafico del campo magnetico terrestre.

La magnetoricezione associata al crittocromo è stata scoperta in una quantità di creature, dal nostro prode pettirosso ai polli, ai moscerini della frutta, agli scarafaggi, e perfino in alcune piante. La scoperta di un'abilità e di un meccanismo così largamente diffusi in natura suggerisce che esso sia stato ereditato da un antenato comune. Quindi le bussole quantistiche sono probabilmente molto remote; forse fornivano il senso dell'orientamento ai rettili e ai dinosauri, che vagavano nelle paludi del Cretaceo, da cui gli uccelli moderni discendono.

Questo articolo è stato tratto dal saggio di Jim Al-Khalili, Johnjoe McFadden - La fisica della vita.

LA RICOSTRUZIONE DI NOTRE DAME DE PARIS

Parigi, 16/04/2019.

Dopo 10 ore di lavoro di 400 vigili del fuoco di Parigi, l'incendio di Notre Dame è stato domato. Le strutture portanti si sono salvate e la Cattedrale potrà essere ricostruita.

La miracolosa tenuta delle volte a vela, sulle due navate centrali a croce, ha impedito alle fiamme di propagarsi all'interno della Cattedrale, scongiurando così una catastrofe che forse avrebbe distrutto per sempre questo importante nostro patrimonio. L'altare centrale, la croce e molti altri tesori custoditi all'interno sono salvi e potranno esserci restituiti, nel loro antico splendore, in seguito ad attenti e competenti interventi di restauro.

La ricostruzione vera e propria riguarderà il tetto, la relativa struttura interna di sostegno, e la guglia neogotica, che invece sono state completamente distrutte dalle fiamme.

Fatte le opportune verifiche di stabilità, eseguiti i necessari interventi di pulizia e ripristino, e predisposti i nuovi ancoraggi, sarà possibile realizzare sulle volte una nuova copertura ed una nuova guglia, da progettare con le seguenti considerazioni.

Il primo aspetto positivo da considerare è che, paradossalmente, l'incidente ci fornisce l'opportunità, addirittura provvidenziale nell'accezione cristiana del termine, di un intervento radicale sulle suddette opere, consentendoci di proiettarne la durevolezza ben oltre la loro restante aspettativa di vita, ormai prossima alla scadenza e che avrebbe potuto concludersi con una catastrofe peggiore di quella avvenuta e forse irreparabile.

Ho dato uno sguardo in rete alla struttura lignea di sostegno delle falde di copertura che è andata perduta, e mi ha colpito la sua concezione rudimentale, risalente al 1200, quando non era ancora nota la teoria delle travature reticolari della scienza delle costruzioni, introdotta poi nel 1800, con cui si sarebbero potute progettare strutture molto più razionali nel disegno e nell'economia dei materiali. Una moderna realizzazione consentirà sicuramente, attraverso una interessante sfida tecnologica, di ottenere la massima razionalizzazione delle opere, nei loro aspetti ingegneristico, della durata e della sicurezza.

Le due figure allegate mostrano un riferimento illustrativo elementare a quanto sopra scritto, con una "Ipotesi sulla ricostruzione di Notre Dame de Paris". La guglia neogotica del 1860, che pesava ben 700 tonnellate, verrebbe sostituita da una nuova in fibra di carbonio, molto più leggera, con un notevole sgravio dei carichi sulle quattro colonne della crociera centrale, indebolite dall'incendio. Con un manto di copertura in lamiere di alluminio, invece che di piombo, si otterrebbe poi una drastica riduzione dei carichi sulle relative strutture metalliche di sostegno, già più razionali nel disegno e nella scelta dei nuovi materiali.

Trascurando una idea conservatrice della ricostruzione, ormai improponibile per ragioni di sicurezza, sembra pertanto che la via obbligata da seguire sia il ricorso alle nuove tecnologie, per ottenere una nuova guglia ed una copertura leggere, idonee ad essere sostenute in sicurezza dalle colonne della Cattedrale, ormai degradate dall'incendio. Si pensi che la nuova copertura completa, manto + struttura di sostegno, peserebbe meno del solo vecchio manto di copertura il lastre di piombo da 5 mm di spessore.

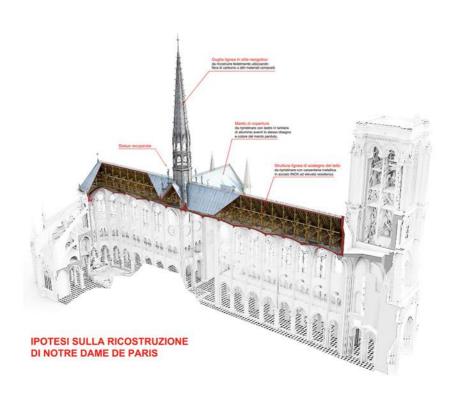
Auspichiamo quindi che venga al più presto intrapresa una ricostruzione delle opere perdute, da realizzarsi con i criteri sopra esposti, che ce le restituisca, nell'immagine esteriore, uguali a come erano, non appena vi si sia posata sopra la patina del tempo.

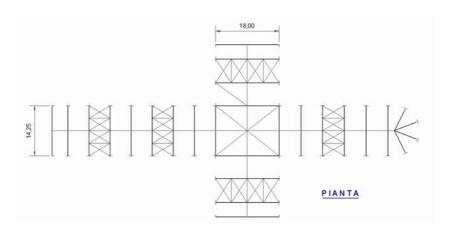
L'approssimarsi concomitante della Pasqua suggerisce all'immaginario dei credenti la scena suggestiva di un drone ideale che, alle prime luci dell'alba, si innalza verticale su Notre Dame ad inquadrare la croce latina della pianta del tetto, fumante ed ancora ardente qua e là, emblema di una passione ormai compiuta, cui seguirà certamente una splendida Pasqua di Resurrezione.

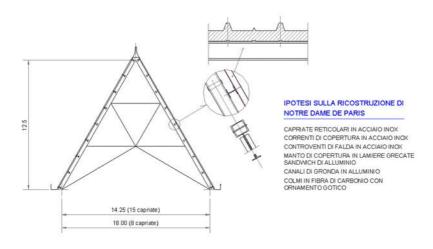
Spinto dalla passione per l'argomento e dalla necessità di tenere la mente in esercizio, per rallentarne il degrado, ho pensato di rispolverare vecchie reminiscenze professionali per verificare alcune ipotesi sul rifacimento del tetto di Notre Dame, già discusse nel precedente post. In particolare ho voluto controllare il nodo cruciale sulla possibilità di ricostruire Notre Dame, legato al peso della nuova copertura da realizzare. Questa dovrebbe risultare molto più leggera della precedente, per compensare il degrado avutosi delle vecchie strutture. Ho quindi esequito una calcolazione di larga massima, che potete leggere nel pdf allegato.

Ho quindi eseguito una calcolazione di larga massima, che potete leggere nel pdf allegato, ottenendo dati confortanti. Il peso complessivo della copertura, manto + travature, si aggirerebbe intorno alle 200 ton., inferiore quindi, come supposto, alle 250 ton. della sola vecchia copertura in lastre di piombo, senza considerare la struttura in legno di sostegno, del peso di 500 ton., ricavata secondo gli storici da 1300 querce (21 ettari di foresta).

Stimo che con una progettazione competente si possa ulteriormente alleggerire il tetto, contenendone il peso complessivo entro le 150 ton., cioè un quinto del vecchio peso!







TETTO DI NOTRE DAME - CAPRIATE Dimensionamento di massima elementi strutturali

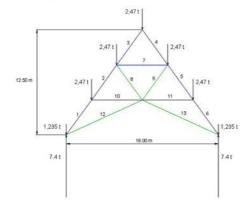
Analisi dei carichi e sforzi nelle aste

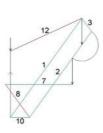
Ipotesi A (Carichi permanenti + sovraccarico neve)

8131 kg - Manto + arcarecci + crociere 2x40x15,4x6,6 2927

- Peso proprio capriata Neve (α = 54°) 31,5x18x6,6 3742

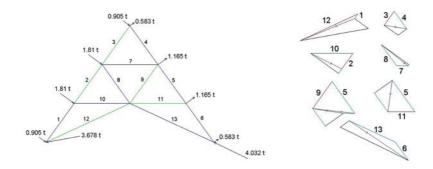
Carico totale su una capriata 14800 kg





Ipotesi B (azione del vento)

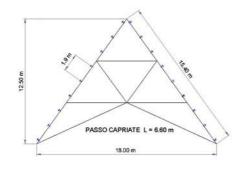
Pressione sulla falda sopravento: p1 = q_b c $_e$ c $_p$ 1 = 35x2,46x0,62 = 53,4 kg/m² Pressione sulla falda sottovento: p2 = q_b c $_e$ c $_p$ 2 = 35x2,46x-0.4 = -34,4 kg/m² Carico totale sulla falda sopravento (su una capriata) = 53,4x15,4x6,6 **5428** kg Carico totale sulla falda sottovento (su una capriata) = 34,4x15,4x6,6 **3496** kg

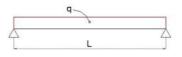


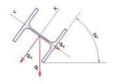
Riepilogo sforzi e verifiche di stabilità

asta	lunghezza (m)	tipo	ipotesi A forza assiale (kg)	ipotesi B forza assiale (kg)	A + B forza assiale N (kg)			calcoli (metodo omega)					
						sezione		A (cm²)	I ₀ (cm)	i _y (cm)	λ=l ₀ /i _y	ω	σ=ωN/A (kg/cm²)
10	5,13	puntone	11368	301	11669		[]						
2	5,13	puntone	8324	1002	7322	2 UPN 140							
3	5,13	puntone	1522	917	605								
4	5,13	puntone	1522	1159	2681								
5	5,13	puntone	8324	2072	10396								
6	5,13	puntone	11368	1215	12583			40,8	513	5,05	102	3,02	931
7	6,00	puntone	6211	608	6819	2 UPN 120	[]	34	600	4,67	128	4,74	951
8	5,13	tirante	3781	1387	2394	2 L 60x6	٦г						
9	5,13	tirante	3781	1758	5539			13,8			*	1	401
10	6,00	puntone	1778	2229	4007	2 UPN 120	[]	34	600	4,67	128	4,74	559
11	6,00	puntone	1778	1436	551								
12	9,92	tirante	7313	3374	10687	2 L 70x7	٦г	18,8	=	=	=	1	568
13	9,92	tirante	7313	2687	4626								

Correnti di copertura (arcarecci)







Impiegando HEA120 disposti ad interasse di 190 cm, con i carichi ipotizzati si ottiene dai calcoli:

 $\sigma_x = 1039 \text{ kg/cm}^2$

 σ_y = 2105 kg/cm², che si riduce a ¼ del suo valore sostenendo al centro la trave con due tiranti di falda: σ_y = 526 kg/cm²

 $\sigma_{tot} = \sigma_x + \sigma_y = 1565 \text{ kg/cm}^2$

Freccia elastica:

 f_x = 3.9 cm, che si dimezza adottando uno schema statico di trave continua su tre appoggi: f_x = 1.95 cm

 $f_v = 0$ (per trave sostenuta al centro)

 $f_{tot} = f_x + f_y = 1.95 \text{ cm} < 1/200 \text{ L}$

Materiali

- Profilati e lamiere : acciaio inossidabile austenitico con σ_{am} = 2400 kg/cm²

- Bulloni : acciaio inox ad alta resistenza

- Lamiere di copertura : alluminio (sandwich 3+2)

PESO TOTALE STRUTTURA DI SOSTEGNO = 105 ton PESO TOTALE MANTO DI COPERTURA = 94 " Totale generale 199 ton

FORMAZIONE ED EVOLUZIONE DELLO SPETTRO DELLA RADIAZIONE DI FONDO COSMICO

La scoperta della radiazione di fondo cosmico è oggi considerata come uno degli eventi più importanti nella ricerca cosmologica.

Le proprietà osservate di questa radiazione, come l'isotropia, la distribuzione spettrale e la polarizzazione, sono subito apparse in intima connessione
con le proprietà globali dell'universo, sì da suggerire nuovi lavori teorici, da confrontare con nuove osservazioni, per una sempre più profonda conoscenza della storia cosmica.

In particolare, la distribuzione spettrale planckiana della radiazione di fondo cosmico e le distorsioni in essa presenti, sembrano correlate con processi altamente energetici precedenti la ricombinazione dello idrogeno primordiale. I vari argomenti trattati in questa tesi, sono tratti dai principali lavori teorici e sperimentali apparsi
sulle pubblicazioni scientifiche specializzate dal 1965,
anno della scoperta della radiazione di fondo cosmico,
fino ad oggi. La rassegna non pretende di essere un quadro generale, ma un bilancio provvisorio su alcuni temi
attuali e di grande interesse in un campo, controverso
ed in rapido sviluppo, quale è oggi la cosmologia osservazionale.

ESTRATTO DA:

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI LECCE FACOLTA' DI SCIENZE ISTITUTO DI FISICA

TESI DI LAUREA

DISTORSIONI DEL FONDO COSMICO E POLVERE INTERSTELLARE

Laureando: Lucieno ANCORA

ANNO ACCADEMICO 1982 - 83

1.1 COSMOLOGIA E OSSERVAZIONI

L'idea fondamentale della cosmologia moderna è che l'universo possieda una generale uniformità, per cui un osservatore, in qualunque parte dell'universo si trovi, dovrebbe darne una descrizione sostanzialmente identica. Questa affermazione, dettata dal principio Copernicano, assieme alle ipotesi di un universo infinito, statico e di età infinita, costituirono la base del noto paradosso di Olbers (1826), secondo cui la luminosità del cielo notturno dovrebbe essere infinitamente grande, contrariamente alle osservazioni.

Vari tentativi furono fatti per liberarsi da questo paradosso, ma nessuno ebbe successo, finchè Hubble nel 1929 non osservò un fenomeno semplice e su larga scala: l'espansione dell'universo.

Lo spostamento spettrale della radiazione emessa dalle galassie (redshift) osservato da Hubble, oltre a

spiegare il paradosso (*), introduceva un concetto nuovo, quello del moto delle galassie. L'universo non doveva essere concepito come un sistema statico, ma come un
colossale processo dinamico.

Le teorie cosmologiche, in seguito sviluppate, dovevano perciò obbedire a due richieste fondamentali:

- i) riprodurre l'espansione cosmologica osservata;
- ii) essere compatibili con il principio generale di uniformità: l'universo deve apparire omogeneo ed isotropo ad ogni osservatore.

Due di queste teorie hanno meritato particolare

La prima teoria, o piuttosto la prima classe di

^(*) L'interpretazione più semplice del redshift delle galassie è quella di un loro moto di allontanamento con una velocità tanto più grande quanto maggiore ne è la distanza. La spiegazione del paradosso deriva in tal caso dalla perdita di energia dei fotoni a causa dello spostamento spettrale. Ad una

teorie, è nota col nome di "cosmologia relativistica",
e si basa sulla teoria della relatività generale di
Einstein. Tutti i modelli di universo della cosmologia
relativistica sono di tipo evoluzionistico, cioè descrivono un universo con proprietà fisiche osservabili che
variano nel tempo.

La seconda teoria, nota come "teoria dello stato stazionario", fornisce la descrizione alternativa di un universo in espansione, ma con proprietà medie costanti nel tempo. In questa teoria si assume l'esistenza di un meccanismo di rigenerazione dell'universo, operante con rapidità tale da mantenere costanti nel tempo le proprietà dell'universo. Ad esempio, se l'universo si espande, come si osserva, si crea nuova materia in modo che la

distanza sufficientemente grande, la velocità di allontanamento delle galassie diventerebbe pari alla velocità della luce. Pertanto queste galassie e quelle più distanti non sarebbero più in grado di contribuire all'illuminazione notturna.

densità media dell'universo resti costante.

Le evidenze sperimentali, benchè ancora assai modeste, hanno sempre dato migliori accordi con le teorie relativistiche. La semplice soluzione delle equazioni di Einstein ottenuta da Friedmann (1922), fornisce una descrizione abbastanza accurata del nostro universo su larga scala.

Poichè in questo lavoro ci limiteremo a considerare modelli di Friedmann, è opportuno dare qui una breve
descrizione degli stessi, in connessione con i principali risultati della cosmologia sperimentale.

L'osservazione di una distribuzione isotropa di galassie, ma con chiare evidenze di "blustering", trova un parziale riscontro nell'ipotesi fondamentale (principio cosmologico) su cui Friedmann ha costruito i suoi modelli omogenei ed isotropi. La tendenza al "clustering", che non può essere descritta da modelli omogenei, è spiegata in termini di perturbazioni sovrapposte ad un fondo di Friedmann omogeneo.

I modelli di Friedmann sono caratterizzati da una metrica general relativistica dello spazio-tempo avente la seguente forma (*):

(1)
$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} (\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2 \theta d\phi^2)$$

Le informazioni sull'evoluzione dell'universo sono contenute nella funzione R(t), detta "fattore di scala cosmico" (**). Il parametro k è una costante di curvatura che può assumere i valori 1,0,-1. Risolvendo le equazioni del campo di Einstein, con l'uso della metrica (1), si ottengono relazioni che associano R, R ed R alla densità O del fluido cosmico. I modelli di Friedmann si co-

^(*) La (1) è anche nota come metrica di Robertson-Walker.

^(**) La distanza fra due qualsiasi particelle cosmologiche (galassie o clusters) risulta proporzionale a R(t).

struiscono da tali relazioni, assumendo una densità $\rho > 0$ ed assegnando i valori di k.

In tutti i casi si ottiene un universo che, in un certo istante del passato (t=0), emerge da una singolarità (R=0, $\rho=\infty$) e susseguentemente si espande. Se k=0,-1, l'espansione prosegue indefinitamente (universo aperto). Se k=1, l'espansione, ad un certo istante t, si convertirà in una contrazione che porterà l'universo di nuovo nello stato di singolarità iniziale (universo chiuso) o ciclico).

Poichè il parametro k è legato alla densità della materia nell'universo, lo stabilire in che tipo di universo siamo, chiuso o aperto, dipenderebbe unicamente dall'ammontare di materia presente nell'universo. Esiste quindi un limite critico per la densità, al di sotto del quale l'universo continuerebbe ad espandersi indefinitamente. Il valore attuale osservato della densità dell'universo è 100 volte inferiore a tale limite critico. Attualmente, vi sono tentativi per trovare nell'universo la materia che manca per raggiungere il limite critico della densità.

Tutti i modelli di Friedmann concordano nella descrizione di un universo primordiale estremamente denso e concentrato in un piccolo volume. Un'altra caratteristica comune a questi modelli è data dalla decelerazione dell'espansione (R<0). Estrapolando ai primi istanti questo carattere dell'espansione, si è ottenuta una importante deduzione teorica: l'espansione cosmologica dovrebbe aver avuto origine da una grande esplosione (big-bang). Gamow (1948), aggiungendo a questa teoria considerazioni termodinamiche (vedi par. 1.2), ha dato l'avvio per lo sviluppo di una nuova teoria cosmologica, oggi chiamata "teoria standard del big-bang caldo".

Recentemente, la radioastronomia, ha scoperto un altro fenomeno cosmologico fondamentale che, come la fuga delle galassie, fornisce un'immagine dell'universo di carattere assolutamente generale. Si tratta delle radioonde di bassa energia provenienti dal cosmo che, a quanto pare, riempiono l'universo ed avvolgono la Terra giungendovi da tutte le direzioni.

La scoperta e l'identificazione di questa radiazione, nota come "radiazione di fondo cosmico", costituiscono una svolta rivoluzionaria per la cosmologia. Sembra infatti che l'origine di questo fenomeno sia da porre in corrispondenza dei primissimi istanti dell'evoluzione dell'universo, così come descritti nella teoria del bigbang caldo. Se così fosse, ci troveremmo davanti ad una rappresentazione delle origini dell'universo, allo stesso modo in cui la radiazione ottica fornisce immagini di epoche più recenti.

Le caratteristiche più importanti della radiazione di fondo cosmico sono:

- a) il suo spettro di corpo nero;
- b) la sua distribuzione angolare isotropa.

Queste proprietà sono intimamente connesse con le richieste di omogeneità ed isotropia dell'universo, contenute nel principio cosmologico. L'universo reale non è strettamente omogeneo ed isotropo, come provato dalla esistenza di galassie, clusters e forse di superclusters. La grande opportunità offerta dalle osservazioni della radiazione di fondo cosmico, risiede proprio nella possibilità di ottenere, attraverso la rivelazione delle deviazioni dalle proprietà a) e b), preziose informazioni sulla struttura su larga scala dell'universo reale.

Descriveremo qui brevemente le principali possibilità di utilizzazione della proprietà di isotropia, avendo riservato l'intero spazio di questo lavoro alla discussione dei risultati connessi con le proprietà spettrali della radiazione di fondo cosmico.

Una anisotropia su grande scala della radiazione di fondo cosmico, potrebbe essere causata da due moti-

- una non-isotropia generale dell'universo, corrispondente ad un flusso cosmico con una velocità che dipende dalla direzione;
- un moto generale del sistema solare rispetto al campo di radiazione.

Misure relative alla 1), darebbero informazioni sulla reale geometria dell'espansione cosmologica e sulla struttura su grande scala dell'universo. Le osservazioni mostrano che la radiazione è isotropa entro lo 0,1 %. Ciò limita automaticamente eventuali disomogeneità dell'universo reale (queste potrebbero influenzare la distribuzione angolare della radiazione termica

tramite lo spostamento verso il rosso gravitazionale). Gli scarti dall'isotropia osservati sono talmente piccoli che le possibili fluttuazioni della densità su una scala superiore a 1000 Mpc (*) sono molto limitate.

La causa 2) darebbe origine ad una "anisotropia di dipolo" per cui il fondo cosmico apparirebbe più caldo nellà direzione del moto dell'osservatore e più freddo in quella opposta (per l'effetto Doppler), con una variazione fra i due estremi avente forma cosinusoidale. Queste osservazioni darebbero la possibilità di ottenere i moti della Terra, del Sole e della Galassia rispetto al "riferimento di quiete" in cui la radiazione di fondo cosmico appare isotropa.

Sembra quindi che i modelli di Friedmann abbiano

^{(*) 1} Mpc = 10^6 pc. Il parsec (pc) è una unità di lunghezza usata in astronomia: 1 pc = $3,086 \times 10^{18}$ cm.

finalmente trovato, nella radiazione di fondo cosmico, un ulteriore potente supporto osservazionale. La teoria dello stato stazionario dovrebbe invece essere abbando-nata, per il semplice fatto che il suo universo, non essendo mai stato denso, non avrebbe mai potuto produrre una radiazione di corpo nero.

1.2 OSSERVAZIONI DELLA RADIAZIONE DI FONDO COSMICO

Le prime ricerche sulla termodinamica e le radiazioni termiche in un universo in espansione ebbero inizio con R.C. Tolman (1930). C.F. Von Weizsäcker (1938)
propose un modello teorico secondo cui gli elementi pesanti si sarebbero generati dalla combustione dell'idrogeno in una primitiva "superstella" che, esplodendo,
avrebbe poi dato origine alla fase di espansione.

George Gamow (1948) dimostrò invece che, secondo la teoria della relatività generale, l'universo non

avrebbe potuto esistere in condizioni statiche e di elevata temperatura, e propose che gli elementi si fossero per la maggior parte formati durante la prima e rapidissima fase di espansione. Calcoli successivi mostrarono che in questa fase non avrebbero potuto formarsi elementi più pesanti dell'elio.

Questa prima fase di espansione sarebbe durata abbastanza a lungo da permettere lo stabilirsi di un equilibrio termico fra radiazione e materia. In queste condizioni la materia irradia come un corpo nero, secondo la legge di Planck.

Le condizioni di temperatura che permettono di spiegare la formazione di elio nei primi stadi della evoluzione, portarono a prevedere l'esistenza di un campo di radiazione termica residua (relitto fossile) di 5 + 6 °K. Ma era impossibile, nel 1948, prevedere che, per certe lunghezze d'onda, un tale campo di ra-

diazione fosse misurabile e che risultasse perfino molto più intenso di qualsiasi altra sorgente di radiazione extraterrestre.

La previsione di Gamow era stata dimenticata quando, nel 1965, due ricercatori americani della Bell Telephone, Penzias e Wilson, nel mettere a punto un'antenna di nuovo tipo sulla lunghezza d'onda di 7,4 cm, notarono l'esistenza di un rumore isotropo, corrispondente ad una temperatura d'antenna di circa 3°K. Su tale lunghezza d'onda l'intensità della radiazione risultava 100 volte superiore a quella che ci si poteva aspettare da qualsiasi radiosorgente conosciuta.

Dicke et al. (1965), che a quel tempo si stavano occupando non già dell'origine degli elementi, ma di quella dell'universo, interpretarono immediatamente la radiazione scoperta come quella predetta da Gamow una quindicina di anni prima. L'isotropia della radiazione

di 3 °K fu considerata dimostrazione convincente che nel passato l'universo aveva attraversato uno stato di equilibrio termodinamico a temperatura molto elevata.

Osservazioni successive, effettuate all'interno di una banda da 0,3 a 70 cm di lunghezza d'onda, hanno definitivamente confermato il carattere termico della radiazione di fondo cosmico. A lunghezze d'onda maggiori di 70 cm la radiazione di 3 °K diviene meno intensa di quella dovuta a radiosorgenti extragalattiche, e non può essere osservata. Per lunghezze d'onda minori di 0,3 cm, emissioni galattiche infrarosse disturbano le misure sovrapponendosi alla radiazione di fondo cosmico. Ma nell'intervallo fra questi due limiti i dati osservativi si adattano molto bene alla curva di Planck corrispondente ad una temperatura T = 2,7 (±0,2) °K.

Nella tabella 1 sono riportati i risultati delle misure effettuate da vari ricercatori. I dati sono sud-

TABELLA I - Osservazioni della radiazione termica di 3°K

λ (cm)	T(λ)	Met.	Autori
73,5	3,7 ±1,2	R	Howell et al. (1967)
49,2	3,7 ±1,2	R	Howell et al. (1967)
21,0	3,2 ±1,0	R	Penzias e Wilson (1967)
20,7	2,8 ±0,6	R	Howell e Shakeshaft (1966)
7,35	3,5 ±1,0	R	Penzias e Wilson (1965)
3,2	3,0 ±0,5	R	Roll e Wilkinson (1967)
3,2	2,69 +0,16	R	Stokes et al. (1967)
1,58	2,78 +0,12	R	Stokes et al. (1967)
1,50	2,0 ±0,8	R	Welch et al. (1967)
0,924	3,16 ±0,26	R	Ewing et al. (1967)
0,856	2,56 +0,17	R	Wilkinson (1967)
0,82	2,9 ±0,7	R	Puzanov et al. (1967)
0,358	2,4 ±0,7	R	Kislyakov et al. (1971)
0,33	2,46 +0,40	R	Boynton et al. (1968)
0,33	2,61 ±0,25	R	Millea et al. (1971)

TABELLA I - (seguito)

(cm)	(οK) Τ(λ)	Met.	Autori
0,263 ~	2,3	CN	Mc Kellar (1941)
0,263	3,22 ±0,15	CN	Field e Hitchcock (1966)
0,263	3,0 ±0,6	CN	Field e Hitchcock (1966)
0,263	3,75 ±0,50	CN	Thaddeus e Clauser (1966)
0,263	2,82 (lim)) CN	Bortolot et al. (1969)
0,132	7,0 (lim)) CN	Thaddeus e Clauser (1966)
0,132	4,74 (lim)) CN	Bortolot et al. (1969)
0,0559	6,6 (lim)) CH	Thaddeus e Clauser (1966)
0,0559	5,43 (lim) CH	Bortolot et al. (1969)
0,0559	8,11 (lim) CH+	Bortolot et al. (1969)
0,04-0,13	$8,3 \mid_{-1,3}^{+2,2}$	r	Shivanandan et al. (1968)
0,06-0,008	$3,1 \mid \begin{array}{c} +0,5 \\ -2,0 \end{array}$	r	Blair et al. (1971)
0,18-1,0	2,7 +0,4	r	Muehlner e Weiss (1973)
0,13-1,0	2,8 ±0,2	r	Muehlner e Weiss (1973)

divisi in tre gruppi:

- R : risultati ottenuti attraverso misure radiometriche al suolo;
- CN, CH, CH⁺: risultati basati su osservazioni ottiche e radio di molecole interstellari;
- r: risultati ottenuti attraverso esperimenti a bordo di pallone o razzo.

In figura 1 sono graficate le misure radiometriche e le osservazioni di righe molecolari. I dati sembrano consistenti con uno spettro di corpo nero, benchè le in-certezze sperimentali non permettano di evidenziare eventuali distorsioni ≤ 10 %.

1.3 <u>DISTORSIONI NELLO SPETTRO DELLA RADIAZIONE DI FONDO</u> COSMICO

La teoria standard del big-bang caldo tratta l'universo come un sistema in espansione composto di materia

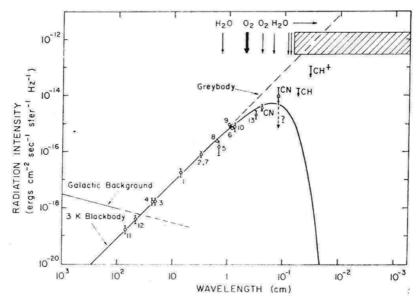


Fig. 15. Spectrum of cosmic background radiation indicating radio and molecular measurements.

FIGURA

e di radiazione. L'evoluzione del sistema è descritta in una sequenza di fasi, ciascuna caratterizzata dai processi di interazione radiazione-materia dominanti. L'assunzione di omogeneità ed isotropia dell'universo, che sta alla base della teoria, permette altresì di assumere che le varie interazioni abbiano avuto luogo ciascuna in condizioni di equilibrio termodinamico alla temperatura caratteristica del tipo di processo: T=Tm=Tr (con Tm e Tr le temperature della materia e della radiazione rispettivamente). Questa temperatura è spesso usata come indicatore d'epoca.

Nei primi stadi dell'evoluzione, 10¹²°K>T>3x10³°K, l'universo è opaco alla radiazione. La trasparenza ha inizio in un preciso istante, ad una temperatura T = 3x10³°K, detto "epoca del disaccoppiamento" o "ultimo scattering", oltre il quale non si ha più interazione radiazione-materia.

Si dimostra (*) che l'espansione cosmologica mantiene il carattere termico della radiazione, una volta che questa abbia cessato di interagire con la materia, e che da tale istante la radiazione si raffredda adiabaticamente, secondo la legge: T' = T R/R' (**).

Ciò si applica anche all'epoca dell'equilibrio termico, T>3x10³°K, avendo assunto un universo strettamente omogeneo ed isotropo. Ma tale modello ideale non è realistico. Nell'universo reale, che non è strettamente omogeneo ed isotropo, notevoli quantità di energia possono essere state immesse nella radiazione di fondo cosmico, attraverso diversi meccanismi, e qualche traccia di esse dovrebbe essere rimasta nello spettro della radiazione.

Così, in linea di principio, eventuali distorsioni presenti nello spettro dovrebbero costituire fonte di preziose informazioni. L'ampiezza delle distorsioni spet-

^(*) vedi Appendice

(**)La temperatura della radiazione di fondo cosmico è semplicemente correlata al fattore di scala cosmologico R(t) o, più precisamente, al redshift

$$z = R(t_o)/R(t) - 1$$

pertanto anche z, come T, può essere usato come indicatore d'epoca:

$$T(z) = 3(1+z) \circ K$$

trali darebbe informazioni sulla quantità di energia che le ha generate. Altre caratteristiche potrebbero indicare l'epoca in cui le distorsioni hanno avuto origine o dare notizie sui meccanismi responsabili. Per una più profonda conoscenza della storia cosmica, si impone quindi la necessità di ridurre le attuali incertezze sperimentali.

Nei paragrafi che seguono, daremo una breve descrizione delle distorsioni spettrali che si possono prevedere come conseguenze di immissioni di energia nella radiazione di fondo cosmico avvenute nelle varie fasi dell'espansione cosmologica.

1.4 PROCESSI FISICI NEL PLASMA PRIMORDIALE E SPETTRO DELLA RADIAZIONE DI FONDO COSMICO

I principali meccanismi responsabili degli input energetici alla radiazione di fondo cosmico, così come

previsti nel quadro della teoria del big-bang caldo, sono i seguenti:

- Dissipazione dell'energia associata a moti locali del fluido primordiale, come turbolenze, onde sonore o onde d'urto.
- Annichilazione materia-antimateria.
- Isotropizzazione di modelli di universo anisotropi.

Per ciascuno dei suddetti meccanismi, l'input di energia alla radiazione di fondo può essere espresso come frazione della densità di energia radiante $\mathcal{E}_{\rm R}$, cioè come

(2)
$$\Delta \varepsilon / \varepsilon_{R}$$
, $\varepsilon_{R} = a T_{R}^{4}$

dove a è la costante di Stefan-Boltzmann e $T_{\rm R}$ la temperatura della radiazione.

Le distorsioni che si sarebbero prodotte nello

spettro e la loro sopravvivenza, non dipendono però soltanto dall'ammontare di detto input, che in certi casi può essere stato anche elevato, ma anche dall'esistenza di processi di trasferimento dell'energia, il cui grado di efficienza avrebbe determinato un più o meno rapido ristabilirsi delle condizioni di equilibrio termico fra radiazione e materia.

I più importanti processi termalizzanti cui di solito si fa riferimento, sono:

- Lo scattering Compton dei fotoni da parte degli elettroni nel plasma primordiale, il cui effetto globale è quello di shiftare la frequenza dei fotoni.
- Il bremsstrahlung (processo libero-libero), consistente nell'emissione di radiazione da parte di elettroni decelerati. Il bremsstrahlung, quando è efficiente, emette un gran numero di fotoni di bassa energia.

Come vedremo, questi due processi sono particolarmente efficienti, singolarmente o in concomitanza, in corrispondenza di ben definiti periodi della storia termica dell'universo. Una suddivisione in epoche, comunemente adottata nello studio delle distorsioni del fondo cosmico, considera stadi evolutivi antecedenti o successivi ad un certo redshift za, riferito come il minimo za cui lo scattering Compton può ancora instaurare una distribuzione di Bose-Einstein.

Esaminiamo ora più in dettaglio la fisica delle interazioni fra materia e radiazione in un universo in espansione (Danese-DeZotti, 1977).

Il problema è quello di prevedere i vari tipi di distorsioni dello spettro della radiazione di fondo co-smico, conseguenze di perturbazioni dell'equilibrio termico fra radiazione e materia.

La trattazione teorica si sviluppa partendo dalla equazione cinetica di un gas di fotoni della meccanica statistica:

(3)
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{C} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{S}$$

che descrive, come risultato delle varie interazioni,
l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione
dei fotoni:

(4)
$$\gamma(x) = (\exp(x) - 1)^{-1}$$

dove $x = h\nu/kT_R$ è una frequenza adimensionale, che non varia durante l'espansione. La legge di distribuzione dei fotoni, η , è assunta essere anche funzione del tempo: $\eta = \eta(x,t)$.

Nella (3), il termine $(\partial \eta/\partial t)_c$ si riferisce alle collisioni (Compton), il termine $(\partial \eta/\partial t)_c$ alle sorgenti di fotoni. Discutiamo questi due termini separatamente.

1.4.1 Azione dello scattering Compton.

L'equazione cinetica per lo scattering Compton ha in partenza una forma integro-differenziale piuttosto complicata, che non offre immediate possibilità di analisi. Al fine di renderla più intelligibile ed utile, Kompaneets (1957), con opportune manipolazioni, l'ha ridotta alla forma:

(5)
$$(\frac{\partial \eta}{\partial t})_{C} = a_{C} \frac{1}{x_{e}^{2}} \frac{\partial}{\partial x_{e}} \left\{ x_{e}^{4} \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_{e}} + \eta + \eta^{2} \right] \right\}$$

dove $x_e = hv/kT_e = x(T_R/T_e)$, essendo T_e la temperatura degli elettroni.

Nella (5) compaiono già quantità di interesse astrofisico, come il tempo caratteristico per l'instaurazione di uno spettro di quasi-equilibrio ($T_R \cong T_e$) sotto l'azione dello scattering Compton:

(6)
$$\gamma_{c} = a_{c}^{-1} = (n_{e} \delta_{T} c \frac{kT_{e}}{m_{e} c^{2}})^{-1}$$

dove n_e è il numero di elettroni per cm^3 , \mathcal{O}_T la sezione d'urto di diffusione Thomson, k la costante di Boltzmann, m_e la massa dell'elettrone e c la velocità della luce.

Secondo Kompaneets (1957), Zel'dovich e Sunyaev (1969) e Chan e Jones (1975), è utile introdurre la variabile adimensionale:

(7)
$$y = \int_{t_h}^{t} \frac{dt}{\tau_C} \simeq \frac{\tau_{exp}}{\tau_C}$$

dove t_h è l'epoca dell'input e $\tau_{exp} = R/\frac{dR}{dt}$ è il tempo di espansione di Hubble.

Eseguendo il cambio di variabile, la (5) si riduce alla:

(8)
$$(\frac{\partial \eta}{\partial y})_{C} = \frac{1}{x_{e}^{2}} \frac{\partial}{\partial x_{e}} \left\{ x_{e}^{4} \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_{e}} + \eta + \eta^{2} \right] \right\}$$

Nel caso di maggior interesse, in cui elettroni caldi interagiscono con radiazione relativamente fredda

 $(T_e \gg T_R)$, l'interazione dominante è lo scattering compton inverso, che è descritto dal termine $\partial \eta / \partial x_\ell$ nell'equazione (8). In tal caso la (8) si semplifica:

(9)
$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{C} = \frac{1}{x_{e}^{2}} \frac{\partial}{\partial x_{e}} \left(x_{e}^{4} \frac{\partial \eta}{\partial x_{e}}\right)$$

Questa equazione rappresenta una diffusione dei fotoni verso energie più alte, in seguito allo scattering
da parte di elettroni caldi. L'effetto si traduce in
un aumento della densità di energia radiante, dato da:

(10)
$$d\xi_R/dy = 4\xi_R$$
, $\xi_R = \xi_{OR} \exp(4y)$

per cui, il parametro caratteristico per la "comptonizzazione" della radiazione, y, dovrebbe essere, nel caso in esame, dell'ordine dell'unità.

Consideriamo ora le soluzioni stazionarie della equazione di Kompaneets, cioè le soluzioni della

$$(11) \qquad \qquad (\frac{\partial n}{\partial t})_{C} = 0$$

Il termine in parentesi {...} nella (5) risulta proporzionale al flusso j di fotoni nello spazio delle energie. Le soluzioni stazionarie sono quindi quelle per cui j = cost. Se j = cost ≠ 0, si hanno soluzioni stazionarie di non-equilibrio. La soluzione generale della (11) per lo stato stazionario di equilibrio dello spettro della radiazione (j=0), ha la forma:

(12)
$$\eta(x_e) = \eta_{BE}(x_e, \mu) = (\exp(x_e + \mu) - 1)^{-1}$$

con $\mu \geq 0$. La costante μ è determinata dall'ammontare $\Delta \varepsilon$ dell'energia immessa nella radiazione. Quindi, l'azione dello scattering Compton conduce ad un equilibrio dello spettro avente forma di una distribuzione di Boseninstein (BE), con "potenziale chimico" μ . Se $\mu = 0$, si ha vero equilibrio, cioè una distribuzione planckiana.

Riassumendo, in un campo di radiazione perturbato, nella situazione in cui $T_e > T_R$, lo scattering Compton

produce uno shift della frequenza dei fotoni riaggiustando la loro distribuzione spettrale su quella corrispondente alla temperatura $T_{\rm e}$ più alta. Tale aumento della temperatura della radiazione non è però accompagnato da un adeguato incremento dei fotoni, perciò, nella distribuzione BE finale vi sarà una deficienza di fotoni rispetto ad una distribuzione planckiana a temperatura $T_{\rm e}$. L'analisi fa vedere che tale deficit è più rilevante nella regione delle basse frequenze dello spettro.

La mancanza di fotoni è misurata dal valore di μ , essendo questo l'unico termine che differenzia la (12) dalla distribuzione di Planck.

Processi che comportano emissione di fotoni, lavorando con sufficiente rapidità, potrebbero ridurre /u
fino a ristabilire una distribuzione di vero equilibrio.

1.4.2 Azione del bremsstrahlung.

Il contributo a $(\partial \eta/\partial t)_S$ dovuto al bremsstrahlung si calcola tenendo conto delle emissioni spontanea e stimolata e dell'assorbimento. Il risultato finale, in forma utile, è:

(13)
$$(\frac{\partial \eta}{\partial t})_{B} = K_{o}g(x_{e}) \frac{\exp(-x_{e})}{x_{e}^{3}} \left\{ 1 + \eta \left[1 - \exp(x_{e}) \right] \right\}$$

dove K_o è un coefficiente che caratterizza la rapidità del processo, e $g(x_e)$ è il fattore di Gaunt mediato su una distribuzione Maxwelliana delle velocità degli elettroni.

Anche qui, definendo:

(14)
$$\tau_B^{*-1} = K_o g(x_e) \frac{\exp(-x_e)}{x_e^3}$$

e

(15)
$$y_B^* = \int_{t_h}^t \gamma_B^{*-1} dt$$

l'equazione (13) assume la forma:

$$(16) \qquad (\frac{\partial \eta}{\partial y_B^*})_B = 1 - \eta(\exp(x_e) - 1)$$

Risolvendo si ottiene:

(17)
$$y_B = y_B^*(exp(x_e) - 1)$$

per la profondità ottica dell'universo rispetto allo assorbimento libero-libero. Quindi si può vedere che, essendo:

il tempo caratteristico TB risulta:

(19)
$$\tau_{B} \propto \begin{cases} x_{e}^{2}, & x_{e} \ll 1 \\ x_{e}^{3}, & x_{e} \gg 1 \end{cases}$$

cioè, il bremsstrahlung emette efficientemente fotoni a bassa energia, ma è inefficiente a produrre quanti energetici. Ci aspettiamo quindi che il bremsstrahlung sia in grado di riempire, almeno parzialmente, la deficienza di fotoni che si aveva alle basse frequenze per l'azione dello scattering Compton.

1.4.3 Azione simultanea dello scattering Compton e del bremsstrahlung.

Come abbiamo precedentemente accennato, si può definire un certo redshift \mathbf{z}_{a} tale che, se l'epoca dell'input è $\mathbf{z}_{h} < \mathbf{z}_{a}$, lo scattering Compton non è più in grado di instaurare una distribuzione BE.

Rispetto ai due processi che stiamo esaminando, è inoltre possibile caratterizzare ogni epoca \mathbf{z}_h anteriore a \mathbf{z}_a , con un valore $\mathbf{x}_{CB}(\mathbf{z}_h)$, che è la frequenza adimensionale alla quale i due processi si bilanciano, cioè agiscono con pari rapidità.

Alle frequenze xe> xCB, lo scattering Compton

sposta su frequenze più alte la maggior parte dei fotoni emessi. Per $x_e < x_{CB}$, predomina il bremsstrahlung e dà uno spettro di Planck a temperatura T_a .

Alle frequenze intorno a x_{CB} , i due processi si bilanciano e si ha uno spettro stazionario:

(20)
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \qquad \text{per } x_e \approx x_{CB}.$$

Poichè al crescere della frequenza lo spettro varia, da una forma planckiana (μ =0) per $x_e \ll x_{CB}$, ad una distribuzione BE (μ =cost) per $x_e \gg x_{CB}$, si può assumere che, vicino ad x_{CB} , lo spettro abbia la forma seguente:

dove

$$\mu'(x_e) \rightarrow \begin{cases} \mu & \text{per } x_e \gg x_{CB} \\ 0 & \text{per } x_e \ll x_{CB} \end{cases}$$

Sostituendo la (21) nelle equazioni (3), (5), (13)

e (20) e risolvendo, si ottiene:

(23)
$$\mu'(x_e) = C \exp(-2x_{CB}/x_e)$$

dove C è una costante che si valuta facendo ragione-voli assunzioni. Per piccole distorsioni ($\mu < x_{\rm CB} < 1$), si ha C = μ .

Un tipico spettro distorto descritto dall'equazione (21), in cui μ ' è dato dall'equazione (23) con $C = \mu$,
è mostrato in figura 2 (curva continua).

1.5 EVOLUZIONE DI UNO SPETTRO DISTORTO A zh> za

Nelle precedenti relazioni (21) e (23), tutte le grandezze si riferivano ad un preciso istante, corrispondente a z_h, in cui si era avuta una certa immissione di energia nello spettro della radiazione. L'analisi trattava quindi della <u>formazione</u> di uno spettro distorto.

Per discutere l'evoluzione temporale di una distor-

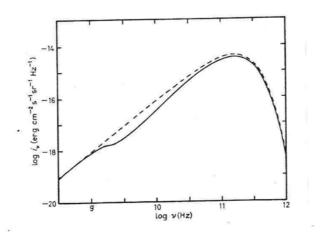


Fig. 3 - A BE-like distorted spectrum (continuous line) shown in comparison with a 2.9°K blackbody spectrum (dashed line).

FIGURA 2

sione così prodotta, supponiamo che l'input di energia alla radiazione sia stato trasmesso con rapidità Q(t) (erg cm⁻³ s⁻¹).

Assumendo inoltre che lo scattering Compton sia sempre stato in grado, per $z_h > z_a$, di instaurare uno spettro BE, e che il potenziale chimico μ sia rimasto stazionarió o sia stato ridotto a zero principalmente per azione del bremsstrahlung, l'evoluzione dello spettro distorto può essere descritta da una funzione $\mu(t)$, la cui forma dipende dalla rapidità dell'immissione di energia e dall'entità della distorsione prodotta, cioè da Q(t) e dallo stesso valore iniziale di μ .

Secondo Danese e De Zotti (1977), si possono ottenere descrizioni approssimate dell'evoluzione, in corrispondenza dei casi limite che seguono.

1.5.1 Grandi distorsioni ($\mu\gg1$).

Poichè lo spettro osservato della radiazione di

fondo cosmico è molto vicino a quello di Planck, si può prevedere che le grandi distorsioni spettrali si siano formate solo prima di un certo redshift z_T , cioè in epoche abbastanza remote, caratterizzate da un'altissima efficienza dei processi libero-libero e dello scattering Compton, per cui immissioni di energia arbitrariamente grandi sarebbero state completamente e rapidamente termalizzate da tali processi.

Le valutazioni pongono il redshift di termalizzazione z_T in corrispondenza di $z \simeq 10^8$. Pertanto, attraverso le osservazioni della radiazione di fondo cosmico, non si può ottenere alcuna informazione sui primi stadi dell'evoluzione dell'universo.

1.5.2 Distorsioni medie (x_{CB}<\mm<1).

L'evoluzione temporale della distorsione è descritta dall'equazione:

(24)
$$\mu(t) = \mu_0 + \int_{t_h}^{t} (1.4 \frac{Q(t)}{\epsilon_R} - \frac{1.7}{t_c(t)}) dt$$

dove t_c è il tempo caratteristico per la termalizzazione delle medie distorsioni. Questo è il caso generale, in cui la variazione di µ nel tempo (aumento o diminuzione) dipende da Q(t).

Se l'immissione di energia è istantanea, Q(t) può essere modellata da una funzione delta: $Q = \Delta \varepsilon S(t-t_h)$, e si ha:

(25)
$$\mu(t) = 1.4 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_R} - 1.7 \int_{t_h}^{t} t_c^{-1}(t) dt$$

In questo caso risulta:

(26)
$$\mu(z_h) = 1.4 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_R}$$

ed il potenziale chimico M decresce pressochè linearmente col tempo.

1.5.3 Piccole distorsioni ($\mu < x_{CB} \le 1$).

La descrizione generale, in questo caso, è data da:

(27)
$$\mu(t) = 1.4 \int_{0}^{t} \frac{Q(t)}{\varepsilon_{R}} \exp(-\int_{t_{h}}^{t} t_{\mu}^{-1}(t')dt')dt$$

dove t_µ è il tempo caratteristico per la termalizzazione delle piccole distorsioni.

Per inputs istantanei (Q = $\Delta \epsilon \delta(t-t_h)$), si ha:

(28)
$$\mu(t) = 1.4 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_R} \exp(-\int_{t_h}^t t_{\mu}^{-1}(t) dt)$$

Queste due equazioni mostrano che le piccole distorsioni si smorzano con legge esponenziale.

1.5.4 Sopravvivenza delle piccole e medie distorsioni.

Si può dimostrare che, per medie e piccole distorsioni, esistono redshifts, z_1 e z_μ rispettivamente, riferiti come i minimi redshifts ai quali dette distorsioni possono essere termalizzate. Ciò significa che, even

tuali distorsioni prodotte in epoche successive, sarebbero sopravvissute nello spettro fino ai nostri giorni.

1.6 EFFETTO DI UNA INIEZIONE DI ENERGIA A z < z

Per $z < z_a$ (y < 1), lo scattering Compton non è più in grado di produrre uno spettro BE.

Durante questa fase di espansione, la radiazione non è più in grado, agendo come termostato, di trarre rapidamente dalla materia una quantità di energia arbitrariamente grande (il massimo sarebbe \mathcal{E}_{R} exp(4y), secondo la (10)). Perciò, eventuali grandi input energetici a z < z_a, causerebbero un forte riscaldamento degli elettroni ($T_{e} \gg T_{R}$).

In questa situazione, le distorsioni spettrali possono essere rappresentate da una sovrapposizione lineare di spettri planckiani:

(29)
$$\eta(v,y) = \int_{0}^{\infty} R(T,y)p(v,T)dT$$

dove R(T,y) è la funzione di distribuzione della temperatura, che descrive la sovrapposizione, e $p(\lor,T)$ è lo spettro di Planck alla temperatura T.

Lo spettro (29) è il risultato della "comptonizza-zione", da parte di elettroni caldi, di uno spettro iniziale di equilibrio alla temperatura T_R . L'equazione (29) resta valida per qualsiasi valore del rapporto T_e/T_R , purchè le deviazioni dallo spettro di equilibrio iniziale siano piccole. Il problema è quindi, in ogni caso di interesse, quello di ottenere l'appropriata funzione R(T,y).

Si distinguono pertanto i due casi seguenti.

(i) Forte riscaldamento degli elettroni ($T_e \gg T_R$).

In tal caso, la sovrapposizione è descritta dalla funzione:

(30)
$$R(T,y) = (4\pi y)^{-1/2} \frac{1}{T_R} \exp \left[4y - \frac{1}{4y} \ln^2 \left(\frac{T}{T_R} \exp(5y) \right) \right]$$

Si può vedere che, con R(T,y) data dalla (30), lo spettro (29) soddisfa l'equazione (9), come richiesto dal fatto che l'interazione dominante che qui si considera è lo scattering Compton inverso.

(ii) Piccole deviazioni da uno spettro di corpo nero.

Questo caso assicura la validità della (29) per ogni valore del rapporto $T_{\rm e}/T_{\rm R}$. Introducendo il nuovo tempo adimensionale:

(31)
$$u = \int_{t_h}^{t} (1 - T_R / T_e) dt / \tau_C$$

tale che u \rightarrow y per T_e \gg T_R, la funzione R(T,u) si ottiene dalla (30) sostituendovi u per y:

(32)
$$R(T,u) = (4\pi u)^{-1/2} \frac{1}{T_R} \exp\left[4u - \frac{1}{4u} \left(\ln \frac{T}{T_R} + 5u\right)^2\right]$$

Il parametro di distorsione u risulta correlato all'input di energia:

(33)
$$u = \frac{1}{4} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_R}$$

Chan e Jones (1975a,b), attraverso calcoli numerici, hanno verificato l'accuratezza delle formule precedenti, ottenendo che:

- caso (i): per y<0,2, l'approssimazione lineare è accurata nella regione RJ, mentre nella regione submillimetrica si hanno piccole differenze fra risultati analitici e numerici, mostrando questi ultimi un eccesso in infrarosso;
- caso (ii): gli spettri numerici e quelli analitici sono in buon accordo.

In figura 3 è mostrato un tipico spettro distorto da una iniezione di energia a z < z $_a$. La distorsione

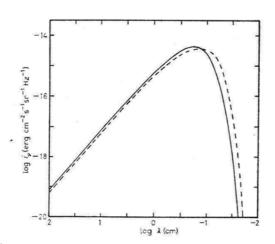


Fig. 5 - Spectrum "comptonized" by hot electrons at z<z and λ_B inside (continuous line) or well outside (dot-dashed line) the observational range. A blackbody spectrum at T=2.9°K is also shown (dashed line).

FIGURA 3

(curva a tratti) è data dalle equazioni (29) e (32), con u = 0,08; lo spettro inperturbato è, come al solito, quello di corpo nero a 2,8 °K (curva continua).

1.7 CONFRONTO CON I DATI DELLE OSSERVAZIONI

La teoria fin qui delineata predice quindi le distorsioni spettrali illustrate qualitativamente nelle figure 2 e 3. Gli aspetti quantitativi del problema dipendono dai dettagli della storia termica dell'universo.

Ai fini comparativi, è utile rappresentare i dati delle osservazioni in termini della temperatura di antenna \mathbf{T}_{A} . Si ottiene così una rappresentazione molto più sensibile alle distorsioni spettrali, essendo \mathbf{T}_{A} proporzionale all'indice di occupazione dei fotoni della statistica di Bose-Einstein:

(34)
$$T_{A} = T \frac{hv/kT}{\exp(hv/kT)-1}$$

Nelle figure 4a e 4b sono rappresentati, in termini della temperatura d'antenna T_A , i tipici spettri distorti delle figure 2 e 3 rispettivamente.

Nella regione delle λ lunghe (RJ), in cui il flusso varia come v^2 , la temperatura d'antenna T_A è costante. Misure accurate in tale regione evidenzierebbero eventuali distorsioni del tipo in figura 4a. Per questi test si usano tecniche di radio-rivelazione a banda stretta da impianti al suolo. I dati ottenuti non sono ancora abbastanza accurati e vengono usati in maniera conservativa, per stabilire limiti superiori, al fine di escludere grandi valori del parametro di comptonizzazione y.

Misure sul picco e nella regione submillimetrica dello spettro potrebbero invece evidenziare le distorsioni tipiche della figura 4b. Per queste misure, sia l'uso di impianti al suolo, sia gli esperimenti a bordo

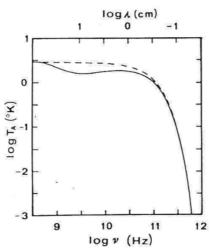


Fig. 4 - Same as in Fig. 3 but in terms of the antenna temperature $\mathbf{T}_{\mathbf{A}}$.

FIGURA 4a

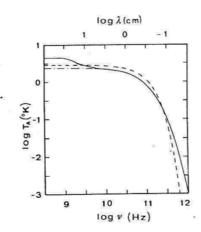


Fig. 6 - Same as in Fig. 5 but in terms of the antenna temperature.

FIGURA 4b

di palloni stratosferici, non hanno dato buoni risultati, per l'inquinamento dei dati dovuto all'emissione atmosferica. Perciò, si pensa che il futuro di
queste osservazioni sia legato ai veicoli spaziali.

APPENDICE

Radiazione ed espansione cosmologica.

La natura cosmica della radiazione termica di 3 °K
è garantita dalla sua isotropia. Tuttavia, considerando
isolatamente un singolo fotone ricevuto, non si può dire
se esso provenga da una galassia o dal fondo cosmico (principio di indistinguibilità dei fotoni).

In prima approssimazione, un fotone emesso da una galassia deve soddisfare la legge di Hubble (*):

(70)
$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{Hd}{c} = \frac{\dot{R}}{R} t$$

dove λ è la lunghezza ($\frac{APPENDICE}{APPENDICE}$ fotone emesso, H la costante di Hubble, d la distanza della galassia ed R il fattore di scala cosmico.

In effetti, la legge (70) vale per brevi intervalli di tempo, perciò scriviamo:

(71)
$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{R}{R} dt = \frac{dR}{R}$$

per la variazione in lunghezza d'onda lungo un elemento di traiettoria dt. misurata da osservatori in moto di

^(*) v = Hd (legge di Hubble); $z = \Delta \lambda/\lambda = v/c$ (redshift)

espansione.

Integrando la (71) tra l'istante di emissione t_e e l'istante di osservazione t_o , si ha:

(72)
$$\int_{\lambda_e}^{\lambda_o} \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{R_e}^{R_o} \frac{dR}{R}$$

Risolvendo, si ottiene:

(73)
$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{R_o}{R_e}$$

cioè, la lunghezza d'onda dei fotoni si espande con l'universo.

In termini del redshift z, la (73) si scrive:

(74)
$$1+z = \frac{R(t_0)}{R(t)}$$

dove a $t_{\rm e}$ si è sostituito un generico istante di emissione $t_{\rm e}$

Per il principio di indistinguibilità dei fotoni, le relazioni (73) e (74) devono valere anche per la radiazione di fondo cosmico.

Possiamo ora dimostrare che lo spettro tipico di corpo nero della radiazione di fondo cosmico si conserva durante l'espansione cosmologica. L'espansione è descritta dal fattore di scala R(t): il volume dell'universo V aumenta come R³. Assumiamo ora che, ad un certo istante t, la distribuzione dei fotoni sia planckiana:

(75)
$$dN = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{v^2 dv}{\exp(hv/kT)-1}$$

All'espandersi dell'universo, il volume diventa: $V'=V(R'/R)^3$. Inoltre, con l'espansione, il numero dei fotoni dN resta costante (se il processo è adiabatico), ma la frequenza si sposta su V'=VR/R', secondo la (73).

Sostituendo queste considerazioni nella (75), si ottiene:

(76)
$$dN' = \frac{8\pi V'}{c^3} \frac{v^2 dv'}{\exp(hv/kT')-1}$$

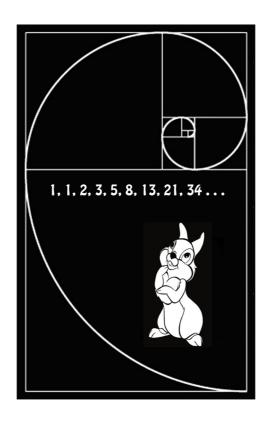
in cui:

(77)
$$T' = T R/R'$$

L'equazione (76) mostra che lo spettro di Planck non cambia nella forma durante l'espansione, ma la radiazione si raffredda secondo la legge (77). Si può vedere che l'energia perduta dal gas di fotoni si ritrova come lavoro speso contro la gravità durante l'espansione dell'universo.

Luciano Ancora

Il "LIBER ABACI" di Leonardo Fibonacci tradotto in Italiano



INTRODUZIONE

Tempo fa, leggendo un articolo di storia della matematica, ho appreso con meraviglia che il *Liber Abaci* di *Leonardo Fibonacci*, un testo di grande interesse storico per l'influenza che ha avuto nello sviluppo della matematica occidentale, non era stato ancora tradotto in lingua italiana. Ho quindi considerato questa opportunità, accarezzando l'idea di svolgere io stesso questo lavoro, avendone il tempo (sono un pensionato) e potendo utilizzare tutto il materiale necessario, presente in rete in latino originale.

L'impresa all'inizio poteva sembrare al di sopra delle capacità di una singola persona, ma poi mi sono accorto che la cosa era fattibile, potendosi eliminare dal libro circa i 2/3 del suo volume totale, cioè i capitoli dall' 8° al 13°, in cui sono trattati argomenti non attinenti alla scienza matematica propriamente detta: come problemi relativi al calcolo dei prezzi delle merci, dei guadagni, degli interessi e sconti, dei cambi fra monete diverse, fino al computo delle operazioni di scambio delle merci e quello degli utili o perdite delle società; insomma, un vero e proprio trattato di *ragioneria*. Ed ancora, nei capitoli 12° e 13°, problemi di vario tipo che l'autore chiama *questiones erratice*, la maggior parte dei quali indicheremmo oggi come *matematica ricreativa*.

Mi sono quindi limitato, nel mio lavoro di traduzione, alle due parti essenziali del Liber Abaci, la prima dedicata all'*aritmetica* e la seconda dedicata all'*algebra*.

Nella prima parte (capitoli da 1 a 7) Leonardo introduce le cifre indoarabiche ed espone un nuovo sistema, basato sulla numerazione posizionale, per eseguire con esse le operazioni aritmetiche fra numeri interi. Gli antichi romani, che non potevano utilizzare il loro modo di scrivere i numeri per eseguire i calcoli come si fanno oggi, ricorrevano invece al calcolo pratico con i sassolini (calculi in latino), che mettevano entro linee verticali segnate per terra a formare colonne. Nell'ultima colonna ogni sassolino valeva 1 unità, nella penultima 10 unità, nella terzultima 100, e così via. Se nell'ultima colonna si arrivava a 10 sassolini, questi venivano sostituiti da un unico sassolino, da mettere nella penultima colonna. Quindi, gli antichi romani avevano già acquisito l'idea di valore posizionale. Il merito degli arabi è stato quello di introdurre le cifre indiane, in sostituzione dei sassolini dei romani, e di sviluppare con queste un nuovo metodo per calcolare, o algoritmo, che diffuso poi dal Fibonacci con il Liber Abaci, ha fornito agli uomini del Rinascimento quanto occorreva per compiere il grande e decisivo progresso, al di là della matematica greca, verso la matematica moderna. C'è da chiedersi quale sia stata la causa che ha determinato una così fortunata scelta da parte degli arabi. Probabilmente, come spesso accade per le grandi scoperte, deve essere stata la necessità: è più facile scrivere sulla sabbia, anziché reperire, al bisogno, dei sassi nel deserto.

Vi è poi la parte riservata all'algebra (capitoli 14 e 15) che costituisce il primo vero trattato di algebra scritto in lingua latina. Qui Leonardo espone gli algoritmi per calcolare le radici quadrate e cubiche, e le regole di calcolo per radicali quadratici e cubici. Quindi, introduce una nuova disciplina, l'algebra, rivelando i legami esistenti fra questa e la geometria euclidea. Era infatti noto allora, che alcune proposizioni contenute nel secondo libro degli Elementi di Euclide venivano usate dai matematici greci per risolvere problemi che successivamente, con l'avvento dell'algebra, furono ricondotti alla risoluzione delle equazioni di secondo grado. Proprio per questo motivo qualcuno ha definito il secondo libro degli Elementi come quello dell'algebra geometrica.

La ricostruzione dell'evoluzione di questa nuova disciplina introdotta da Leonardo Pisano, l'algebra, nei secoli dal tredicesimo al quindicesimo, è possibile attraverso lo studio dei cosiddetti *Trattati d'abaco*, scritti successivamente dai *Maestri d'abaco*, che in quel periodo diffondevano in Europa l'insegnamento delle cifre indo-arabiche e delle relative tecniche di calcolo. In essi si vede come l'attenzione degli algebristi si sia spostata gradatamente, con difficoltà, dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado contenute nel Liber Abaci, a quelle di terzo e quarto grado, con le formule trovate poi da Niccolò Tartaglia e da Ludovico Ferrari, nel sedicesimo secolo. Si può dire che la matematica moderna ha avuto inizio quattro secoli fa, quando la macchina algebrica ha cominciato ad essere applicata anche alla geometria, e lo studio delle curve, figure e superfici si è tradotto nello studio di opportune equazioni.

Dell'omesso capitolo dodicesimo, ho ritenuto poi opportuno tradurre due dei numerosi problemi in esso proposti. Il primo è quello in cui si chiede di calcolare *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur*, nella cui soluzione compaiono per la prima volta i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata *la successione di Fibonacci*. Il secondo è quello in cui si propone di sommare una sequenza di potenze del numero due su una scacchiera, cioè, il famoso problema nato dalla leggenda sulla nascita del gioco degli scacchi, o *Leggenda di Sissa Nassir*. Quest'ultimo problema costituisce anche un esempio di come sia stato possibile, con il sistema di numerazione posizionale indo-araba, ricavare un numero spropositato, come 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, che con il sistema di numerazione romana sarebbe stato ben difficile, o forse impossibile, ottenere.

NOTE SULLA SECONDA EDIZIONE

Con questa seconda edizione del settembre 2018, è stato riveduto e corretto il contenuto della prima edizione, e sono stati aggiunti i capitoli VI e VII, a completamento della prima parte della traduzione in italiano del Liber Abaci.

Ne risulta una sezione dell'opera del Fibonacci che può essere letta autonomamente, contenendo compiutamente gli elementi introduttivi alla "nuova dottrina", che costituiscono la parte essenziale del Liber Abaci, quella che ne ha determinato la successiva fortuna e diffusione.

A causa del suo carattere introduttivo ed elementare, e per la chiarezza degli argomenti trattati, questa prima parte del Liber Abaci risulta, secondo il mio parere, quella più vicina al contenuto della corrispondente parte del libro originale, in quanto, probabilmente, quasi del tutto scevra da quei presunti limiti di incompletezza ed inattendibilità che gli studiosi hanno attribuito alle fonti trascritte dal Boncompagni, le quali, pur essendo fra le più antiche, risultavano anche esse trascritte dai manoscritti originali del Fibonacci, che purtroppo sono andati perduti.

Considerazioni conclusive (Cap. I-VII)

L'introduzione in Europa del sistema di numerazione indo-arabo, avvenuta attraverso la pubblicazione del Liber Abaci, da parte di Fibonacci, rappresenta la prima fase di un processo evolutivo che si è concluso con la diffusione pressoché universale del sistema di numerazione oggi in uso.

Tuttavia, con tale sistema iniziale, si usavano soltanto numeri interi, mentre si ricorreva alle frazioni proprie per indicare le parti inferiori all'unità. Ne risultavano, come abbiamo visto, procedure di calcolo piuttosto complicate per le operazioni aritmetiche con tali numeri.

Un primo passo semplificativo fu compiuto da Stevino, che pubblicò nel 1585 un libretto in fiammingo, De thiende (Il decimo), in cui si fa un uso esclusivo delle frazioni decimali, descrivendo procedure di calcolo più semplici per operare con tali numeri.

Si deve infine a Nepero l'ultimo passo per arrivare alla notazione oggi in uso; nel 1616, nella traduzione in inglese del suo libro sui logaritmi (Mirifici logarithmorum canonis descriptio), i numeri decimali vengono per la prima volta scritti con la virgola, o con il punto, per separare la parte intera da quella frazionaria.

Il "Sistema di numerazione posizionale in base dieci", ormai completamente sviluppato, viene successivamente generalizzato alle unità di misura, con la rivoluzione francese, diventando così il sistema di numerazione universalmente in uso.

Con esso si sviluppano le procedure di calcolo della moderna Aritmetica, molto più semplici, tanto da poter essere insegnate ai ragazzi, nel primo ciclo della nostra istruzione scolastica.

Introduzione al Capitolo XII.

Siamo finalmente giunti al XII capitolo del Liber Abaci, il più ampio, comprendente problemi di matematica "divertente", uomini che trovano borse, conigli che si moltiplicano, divisione di cavalli ecc.

Qui sono trattati, fra gli altri, due meravigliosi problemi:

il primo è quello in cui si chiede di calcolare " Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur", nella cui soluzione compaiono per la prima volta i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata la successione di Fibonacci;

il secondo è quello in cui si propone di sommare una sequenza di potenze del numero due su una scacchiera, cioè, il famoso problema nato dalla leggenda sulla nascita del gioco degli scacchi, o Leggenda di Sissa Nassir.

NOTA - Questo fascicolo (100 pagine in tutto) si limita alle prime tre delle nove parti del capitolo XII, elencate all'inizio, e non proseguirà oltre. Ho infatti deciso di abbandonare la traduzione, avendo appreso online dell'avvenuta pubblicazione della prima edizione critica completa del Liber Abaci, Olschki 2020, che di fatto rende obsoleto questo mio lavoro. Mi dispiace un pò di non proseguire con questa appassionante iniziativa, ma mi piace tuttavia immaginare di avere in qualche modo contribuito (almeno sollecitando) al realizzarsi dell'altra più importante opera sopra citata.

LE PAGINE TRADOTTE SONO STATE PUBBLICATE NELLA BIBLIOTECA DIGITALE NO PROFIT "INTERNET ARCHIVE AL SEGUENTE LINK: IL "LIBER ABACI" DI LEONARDO FIBONACCI TRADOTTO IN ITALIANO: Luciano Ancora: Free Download, Borrow, and Streaming: Internet Archive

Archimede, nella lettera introduttiva al suo libro "Sulla sfera e il cilindro", riferendosi ai risultati delle sue ricerche su questi oggetti, scrive: "per queste proprietà appartenenti da sempre alla natura di queste figure accadde che dei molti degni geometri anteriori a Eudosso tutti le ignorarono e nessuno le comprese". Le proprietà degli oggetti della matematica sono quindi "preesistenti" nella natura stessa degli oggetti, nascoste al nostro pensiero. Il computer, amplificando le nostre capacità di indagine, ci aiuta a riscoprirle, ed il loro ritrovamento è sempre fonte di sorpresa e meraviglia.